

ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA AGRICULTURA

INSTITUTO GEOGRÁFICO E GEOLÓGICO

BOLETIM N.º 37

AEROTRIANGULAÇÃO ESPACIAL



SÃO PAULO — BRASIL
1962

BOLETINS PUBLICADOS PELA EXTINTA COMISSÃO GEOGRÁFICA E GEOLÓGICA DO ESTADO DE SÃO PAULO, HOJE INSTITUTO GEOGRÁFICO E GEOLÓGICO

- N.º 1 — Retrospecto histórico. 1889. (esgotado).
- N.º 2 — Reconhecimento geológico do vale do rio Paranapanema. 1889. (esgotado).
- N.º 3 — Dados climatológicos dos anos de 1887 e 1888. 1889. (esgotado).
- N.º 4 — Considerações geográficas e econômicas sobre o vale do rio Paranapanema. 1890.
- N.º 5 — Contribuições para a botânica paulista. Região Campestre. 1890.
- N.º 6 — Dados climatológicos do ano de 1889. 1890.
- N.º 7 — Contribuições mineralógicas e petrográficas. 1890.
- N.º 8 — Dados climatológicos do ano de 1890. 1891.
- N.º 9 — Os sambaquis de S. Paulo. 1893.
- N.º 10 — Ensaio para uma sinonímia dos nomes populares das plantas indígenas do Estado de S. Paulo. 1895.
- N.º 11 — Ensaio para uma distribuição dos vegetais nos diversos grupos florísticos no Estado de S. Paulo. 1898.
- N.º 12 — Flóra Paulista. I. Família Compositae. 1897.
- N.º 13 — Flóra Paulista. II. Famílias Solanaceae e Scrophulariaceae. 1897.
- N.º 14 — Flóra Paulista. III. Famílias Campanulaceae, Cucurbitaceae e Calyceraceae. 1897.
- N.º 15 — Flóra Paulista. IV. Família Myrsinaceae. 1905.
- N.º 16 — Ensaio para uma sinonímia dos nomes populares das plantas indígenas do Estado de São Paulo. 1906.
- N.º 17 — Dados climatológicos do ano de 1903. 1906.
- N.º 18 — Dados climatológicos. Verão 1905-1906. 1906.
- N.º 19 — Dados climatológicos. Outono 1906. 1906.
- N.º 20 — Dados climatológicos. Inverno 1906. 1906.
- N.º 21 — Dados climatológicos. Primavera 1906. 1906.
- N.º 22 — Petroleum geology of the State of São Paulo. 1920.
- N.º 23 — Jazida de magnetita do morro do Serrote. 1939 (*)
- N.º 24 — Coletânea de análises químicas executadas no período de 1889 a 1935 na extinta Comissão Geográfica e Geológica. 1939.
- N.º 25 — I. As ocorrências de minérios de ferro e pirita no Estado de São Paulo.
- N.º 26 — Ouro no Estado de São Paulo. 1939.
- N.º 27 — Os minérios não metálicos do Estado de São Paulo. 1940.
II. Gondito no Estado de São Paulo. 1939.
- N.º 28 — Coordenadas geográficas e geodésicas. 1940.
- N.º 29 — Determinação do meridiano por uma estrela em elongação, com o uso de tabelas para as latitudes de 20.º a 25.º. 1942.
- N.º 30 — I — Compensação dos erros nos trabalhos de triangulação.
II — Nivelamento de precisão. 1943.
- N.º 31 — O Tungstênio. 1945.
- N.º 32 — Calcário no Estado de São Paulo. 1952.
- N.º 33 — Bibliografia da Geologia, Mineralogia, Petrografia e Paleontologia do Estado de São Paulo. 1952.
- N.º 34 — Coordenadas Geográficas de Locais do Estado de São Paulo. 1953.
- N.º 35 — Bibliografia da Geologia do Estado de São Paulo — 1952-58, 1959.
- N.º 36 — Nivelamento Geral do Estado — Altitudes de Precisão. 1962.

(*) A partir do boletim 23 publicações do Instituto Geográfico e Geológico.

AEROTRIANGULAÇÃO ESPACIAL

PELO

CAPITÃO DE MAR E TERRA

Alberto dos Santos Franco

PREFACIO

Sentimo-nos profundamente honrados em ver êste trabalho editado sob o patrocínio do Instituto Geográfico e Geológico do estado de São Paulo, justamente quando se inicia o levantamento aerofotogramétrico do território paulista. Isto significa o endosso dêsse tradicional Instituto às ideias que aqui desenvolvemos e que esperamos sejam de utilidade na execução da colossal tarefa que é aquele levantamento. Não fôra o interêsse que demonstrou o I.G.G. na publicação dêste estudo e não nos seria dado o prazer de contribuir, ainda que modestamente, para o desenvolvimento da cartografia nacional, com um trabalho sôbre aerotriangulação espacial que tem, para nós, o sabor do pioneirismo.

De fato, com exceção de um artigo que publicamos no n.º 187 da revista Engenharia, desconhecemos qualquer publicação brasileira que trate, ainda que superficialmente, de tão fascinante tema. Se, por um lado, isto constituiu uma dificuldade a vencer, por outro apresentou-se como um estímulo e uma oportunidade ímpar para escolher o caminho a trilhar, o qual, a seguir, descreveremos em linhas gerais.

Iniciamos o trabalho expondo, de maneira sucinta, o que se entende por aerotriangulação espacial e recordando os princípios básicos de funcionamento dos aparelhos de primeira ordem. Em seguida ocupamo-nos longamente do problema da orientação relativa, cuja importância é fundamental na execução prática da aerotriangulação. Aí tratamos de vários métodos hoje usados na orientação calculada numérica e gráficamente e resolvemos o problema de maneira geral, pois desenvolvemos a teoria de tal forma que pode ser aplicada a fotogramas com inclinações quaisquer. Essa possibilidade nós a devemos à generalização da equação da paralaxe transversal, assunto que foi objeto de uma comunicação que fizemos à II Reunião de Consulta sôbre Cartografia, realizada em 1959, em Curitiba. Preocupamo-nos com a solução geral dêsse problema porquanto, atualmente, a aerotriangulação com câmaras convergentes já é uma realidade.

A fim de que o trabalho não perdesse seu caráter prático, tratamos detalhadamente das técnicas instrumentais relativas aos vários métodos de aerotriangulação hoje empregados, aí incluindo a utilização do aeromultiplex que, apesar de receber presentemente críticas acerbas, continua sendo um instrumento de utilidade indiscutível, como mostra seu emprego permanente na Diretoria de Hidrografia e Navegação (D.H.N.) do Ministério da Marinha, que dele tem tirado excelentes resultados. Sôbre tais assuntos versa o capítulo VI.

No capítulo VII fizemos um estudo detalhado da propagação dos erros nas aerotriangulações, de acôrdo com os mais modernos conceitos a respeito da natureza desses erros. Aí introduzimos a denominação de “erro sistemático fictício”, proposta por Zarzycki, que nos pareceu bastante apropriada para designar o efeito de dupla acumulação de erros acidentais que sempre ocorre nas aerotriangulações. Algumas vezes nos referimos à combinação dos erros sistemáticos com os sistemáticos fictícios como erros sistemáticos, para evitar a prolixidade da denominação, mas o leitor não terá dificuldade em perceber a razão de tal liberdade.

Os três últimos capítulos tratam da compensação das aerotriangulações: o capítulo VIII cuida da compensação de uma faixa isolada, o IX da de um circuito fechado e o X da de um bloco.

Na elaboração do capítulo VIII serviram-nos de ponto de partida os trabalhos de Verdin e Moreau, do “Institut Géographique Militaire” da Bélgica. Ao tratarem da compensação pelo método dos mínimos quadrados esses autores abandonaram, no cálculo da planimetria, as variáveis que usou Verdin no seu método de interpolação, publicado com o título de “Transformation des Coordonées-appareil en Coordonées-terrain”. Ao elaborarmos nosso citado trabalho, publicado na revista *Engenharia*, restauramos as variáveis primitivamente usadas por Verdin e admitimos que, assim procedendo, obteríamos uma solução aproximada do problema da compensação. Posteriormente conseguimos descobrir que a escolha das referidas variáveis era legítima e, no presente trabalho, encontramos a justificação teórica dessa escolha. Isto importou numa formidável simplificação que foi levada ao extremo com o método por nós empregado na formação das equações normais que se reduziram ao tipo $ax = b$.

O capítulo IX já havia sido, anteriormente, assunto de uma comunicação que fizemos à I Reunião de Consulta sobre Cartografia, realizada em São Paulo em 1958. Nessa comunicação encontramos algumas incorreções que foram aqui eliminadas. O problema do circuito fechado é uma extensão das mesmas ideias apresentadas no capítulo VIII.

Finalmente, o último capítulo é apenas a divulgação do método empírico para a compensação de blocos, usado no “Institut Géographique Militaire” da Bélgica, da autoria de Verdin e Moreau.

Embora o método desenvolvido no capítulo VIII se preste à inclusão de outras equações de condição relativas a pontos de apoio existentes ao longo da faixa, preferimos deixar a solução de tal problema para outra oportunidade, pois, o que mais importa no presente momento, é não retardar a divulgação daquilo que será, possivelmente, a rotina do trabalho já iniciado pelo I.G.G.

No cálculo das aerotriangulações, abandonamos completamente o método dos polinômios pois, ao que nos parece, não possui a versatilidade do que apresentamos. Realmente este pode ser aplicado, sem a

menor alteração, a qualquer método de aerotriangulação atualmente em uso, inclusive aqueles onde são usados dados adicionais, como os fornecidos por estatoscópio, câmara de horizonte, etc.

O exemplo que figura no capítulo VIII, foi o resultado da passagem de uma faixa num aparelho de segunda ordem, o *Estereosimplex* Santoni da Seção de Topografia do Departamento de Engenharia e Mecânica da Secretaria de Agricultura. Embora se trate de um aparelho de segunda ordem, os resultados que fornece são bastante rigorosos. Na realidade esse aparelho só difere dos de primeira ordem por não possuir transposição ótica das imagens, o que obriga a transportar materialmente o fotograma de vante para ré, ao ser mudado o par, mediante um acessório especial que garante a transferência rigorosa dos parâmetros de orientação.

Para terminar, desejamos externar nosso profundo respeito pelos dois fotogrametristas belgas que tão longe levaram as pesquisas sobre aerotriangulação espacial e os nossos mais sinceros agradecimentos ao Departamento de Engenharia e Mecânica da Secretaria da Agricultura, pelo auxílio que nos prestou, ao Dr. Giovanni Frollani, técnico da Vasp Aerofotogrametria S. A., que além de rever com carinho o original apresentou-nos uma série de sugestões cuja inclusão melhorou bastante o trabalho e, finalmente ao I. G. G. que tão gentilmente se propôs a editar este estudo.

A. S. FRANCO

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1. — Densificação do apóio para restituição

Não exageramos, estamos certos, se dissermos que praticamente tôdas as pesquisas modernas no terreno da aerofotogrametria giram em tôrno da triangulação aérea espacial. De fato, são nela hoje depositadas as maiores esperanças para a redução do apóio terrestre ao mínimo possível pois este é, sem dúvida, o que mais onera o levantamento aerofotogramétrico. Na realidade, a orientação absoluta de um par isolado de fotogramas exige um mínimo de dois pontos planimétricos e três altimétricos, devidamente determinados no terreno e identificados com precisão numa das fotos do par a restituir. No entanto, a segurança do trabalho requer número superabundante de pontos, ou sejam três planimétricos e quatro altimétricos. Além do mais, tais pontos devem ser distribuídos dentro do par estereoscópico de tal forma que abranjam a maior área possível, o que corre indubitavelmente, para tornar o serviço de campo mais moroso e, conseqüentemente, mais caro.

Para contornar as dificuldades apontadas, é possível apelar para a triangulação radial, capaz de cobrir grandes áreas com reduzidíssimo apóio terrestre e cuja realização mecânica é rápida, barata e suficientemente rigorosa em bom número de casos. O inconveniente da triangulação radial reside no fato dela só fornecer apóio planimétrico.

Embora mais dispendiosa, a aerotriangulação espacial, que é, justamente, o assunto que nos preocupa, oferece apóio plani-altimétrico para restituição, com distribuição sôbre a área que nenhum serviço de campo será capaz de fornecer. Se executada com aparelhos de primeira ordem, tais como o Estereoplanígrafo, o Fotoestereôgrafo Beta, o Estereocartógrafo, etc., os resultados serão suficientemente precisos para eliminar o serviço de campo em vastas áreas, daí resultando considerável economia.

Vejamos, então, o que se entende por aerotriangulação espacial. Se imaginarmos uma faixa de vôo, o mais retilínea possível, em que estejam apoiados, com pontos fotográficos identificados no terreno, o primeiro e o último pares da faixa, a aerotriangulação espacial con-

siste em orientar o primeiro par utilizando os pontos de apoio nele existentes e, mediante a concatenação dos modelos óticos, garantida pela superposição longitudinal das fotos, chegar ao último par, também apoiado. É claro que na chegada ao último par os pontos de apoio aí determinados terão coordenadas diferentes das fornecidas pelo processo de concatenação no instrumento. Haverá, assim, um erro de fechamento que deverá ser convenientemente ajustado.

Durante a concatenação, a ligação dos modelos sucessivos é, nos aparelhos de primeira ordem, efetuada medindo as coordenadas x , y , z , nos eixos de referência dos aparelhos, de pontos comuns aos pares consecutivos. Esses pontos, denominados "pontos de transporte", é que vão constituir, de um modo geral, a densificação do apoio para restituição.

Ora, como o operador que executa a aerotriangulação no aparelho de primeira ordem sempre escolhe, para observação, os pontos que se lhe apresentem mais nítidos, é claro que a utilização desses pontos na orientação para restituição facilitará bastante o trabalho do operador que fizer a restituição.

1.2 — Métodos de aerotriangulação

O mais antigo método de aerotriangulação é, sem dúvida, o denominado "aeropoligonação", da autoria de v. GRUBER. Mais tarde o mesmo autor, utilizando o invento do finlandês VAISALA, o estatoscópio, que é um altímetro diferencial de precisão, imaginou o "aeronivelamento". Neste método são introduzidas, na fase das operações instrumentais, as diferenças de altura de voo, reduzidas à escala do modelo, fornecidas pelo estatoscópio que registra, em sincronia com os disparos da câmara aérea, as leituras do altímetro.

Em 1948, no Congresso Internacional de Fotogrametria de Haia, o fotogrametrista francês G. Poivilliers apresentou um novo método que ele próprio denominou "caminhamento aerofotográfico a altitude constante", capaz de permitir a concatenação de grande número de fotografias sem auxílio de estatoscópio registrador. Esclarecemos que o mesmo não acontece à aeropoligonação, onde a curvatura da Terra interfere de tal forma que, além de um pequeno número de modelos (que limitamos praticamente a 10), os erros prejudicam seriamente o trabalho do operador.

Ainda o próprio Poivilliers apresentou uma comunicação à Academia de Ciências de França, em 1952, descrevendo novo método em que os modelos são justapostos sem qualquer movimento *linear* dos centros de projeção. Neste método o volume de cálculos aumenta bastante mas, segundo seu autor, fica dispensada a passagem da faixa duas vezes, em sentidos opostos, no aparelho.

Além desses métodos, dos quais cuidaremos em detalhe mais adiante, citaremos ainda um outro que consiste em introduzir correções para os erros sistemáticos que se acumulam durante a conca-

tenação. Limitamo-nos, porém, a esta citação, uma vez que, a nosso ver, os erros “aparentemente” sistemáticos variam de uma faixa para outra, de quantidades capazes de se afastarem consideravelmente das que seriam obtidas de acôrdo com as hipóteses.

Terminamos êste parágrafo esclarecendo que, a fim de evitar a prolixidade da denominação dada por Poivilliers ao seu primeiro método, chama-lo-emos de “aerocaminhamento”. Quanto ao segundo método do mesmo autor denomina-lo-emos “aerocaminhamento a base constante”.

1.3 — Idéia geral das operações instrumentais

A fim de facilitar a compreensão do que entendemos por triangulação aérea espacial, vamos apelar para o aeromultiplex (Fig. 1.1), dadas a sua popularidade e a clareza com que nos faz compreender a concatenação dos modelos óticos.

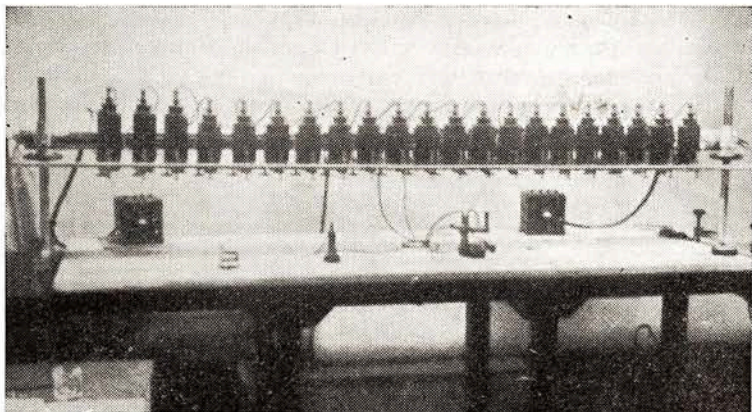


FIG. 1.1

Descrevamos sucintamente a aeropoligonação de v. GRUBER: Suponhamos (Fig. 1.2) realizadas as orientações relativa e absoluta do primeiro par de uma faixa de vôo no aeromultiplex. Se deixarmos fixos os projetores dêsse par, poderemos agregar um terceiro, com o fotograma que se segue, orientando-o sem mover o anterior. Ao terceiro agregaremos um quarto e assim sucessivamente, recostituindo na projeção tridimensional, uma vasta faixa de terreno.

O transporte de escala de um modelo para outro é realizada escolhendo um ponto próximo ao nadir comum aos dois pares consecutivos e fazendo variar a distância b (base) entre o projetor já orientado e o que se está orientando, até que se tenha, no ponto escolhido, a mesma leitura altimétrica obtida no par precedente.

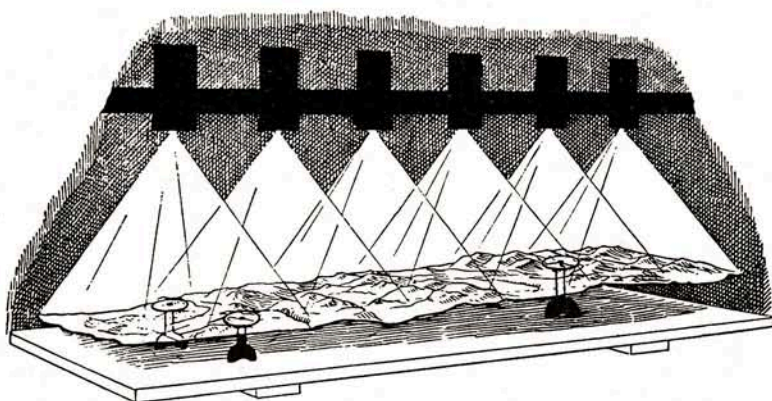


FIG. 1.2

A denominação “aerotriangulação espacial” poderá, agora, ser compreendida pelo exame da figura 1.3. Admitindo a ausência de erros no processo descrito, ao efetuarmos a orientação absoluta do primeiro par, a base b_1 tomará seu valor exato, na escala do modelo

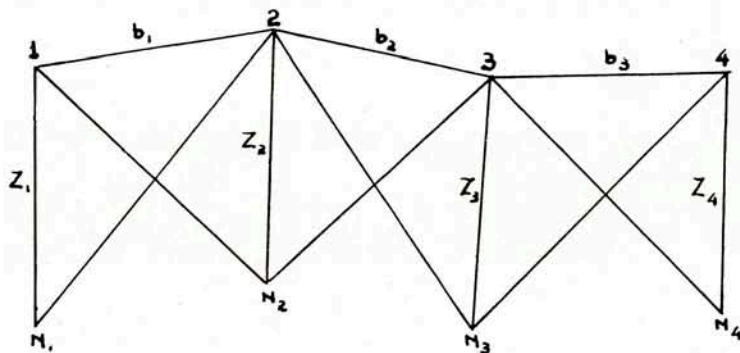


FIG. 1.3

ótico, da mesma forma que os valores de Z_1 e Z_2 . Consequentemente se a orientação relativa do par (2-3) for feita movendo apenas o projetor 3 e se, em seguida, obrigarmos, por uma translação de 3 ao longo de b_2 , a leitura altimétrica de N_2 a coincidir com a do par anterior, estamos desta forma determinando a base b_2 em função de Z_2 e assim sucessivamente. Trata-se, por conseguinte, de uma verdadeira “triangulação aérea espacial”, pois, como a trajetória do avião não é rigorosamente retilínea, $1N_12$, $1N_22$, $2N_23$, etc., não estarão no mesmo plano.

1.4 — Os aparelhos de primeira ordem

Tendo em vista que o aeromultiplex é um aparelho em que existe uma série de projetores, cada um deles com seis graus de liberdade (3 rotações e 3 translações), materializando a faixa de vôo, nenhuma dificuldade existe em compreender a orientação progressiva, que constitui, por si só, a aerotriangulação. Nos aparelhos de primeira ordem, porém, só existem duas câmaras de projeção, sem qualquer movimento de translação. Surge, assim, a primeira dificuldade em compreender como é possível introduzir a base, a fim de ajustar a escala e como é viável nivelar longitudinalmente o modelo. A solução desta dificuldade é obtida com a aplicação do paralelogramo de Zeiss, do qual trataremos a seguir. Sejam (Fig. 1.4) O_1 e O'_2 as duas objetivas de projeção das câmaras cujos eixos óticos acham-se com as inclinações iguais àquelas com que foram tomadas as fotos durante o vôo. Com isto a imagem estereoscópica de p , em projeção

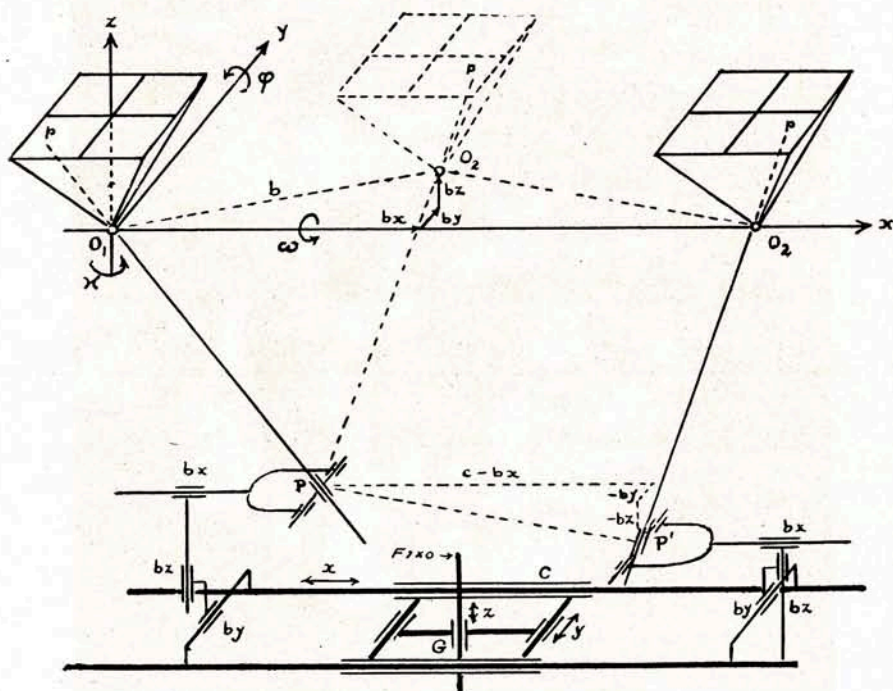


FIG. 1.4

direta, como no caso do aeromultiplex, seria formada em P . A reta $O_1O'_2$ representa a base aérea, na escala do modelo e bx , by e bz as suas componentes segundo os três eixos coordenados. Tendo em vista que, no aparelho, as câmaras de projeção ficam situadas em

O_1 e O_2 , sendo O_1O_2 uma constante instrumental, tudo se passa como se uma das câmaras houvesse sofrido uma translação O'_2O_2 , conservando, assim, a orientação do seu eixo ótico no espaço. Desta forma os raios luminosos (nos aparelhos de projeção ótica) ou sua materialização no espaço (nos aparelhos de projeção ótico-mecânica ou mecânica), serão paralelos aos que seriam projetados de O'_2 , isto é, O'_2P será paralelo a O_2P' .

É claro agora que nos aparelhos de projeção ótica como, por exemplo o estereoplanígrafo Bauersfeld-Zeiss (Fig. 1.5), a imagem

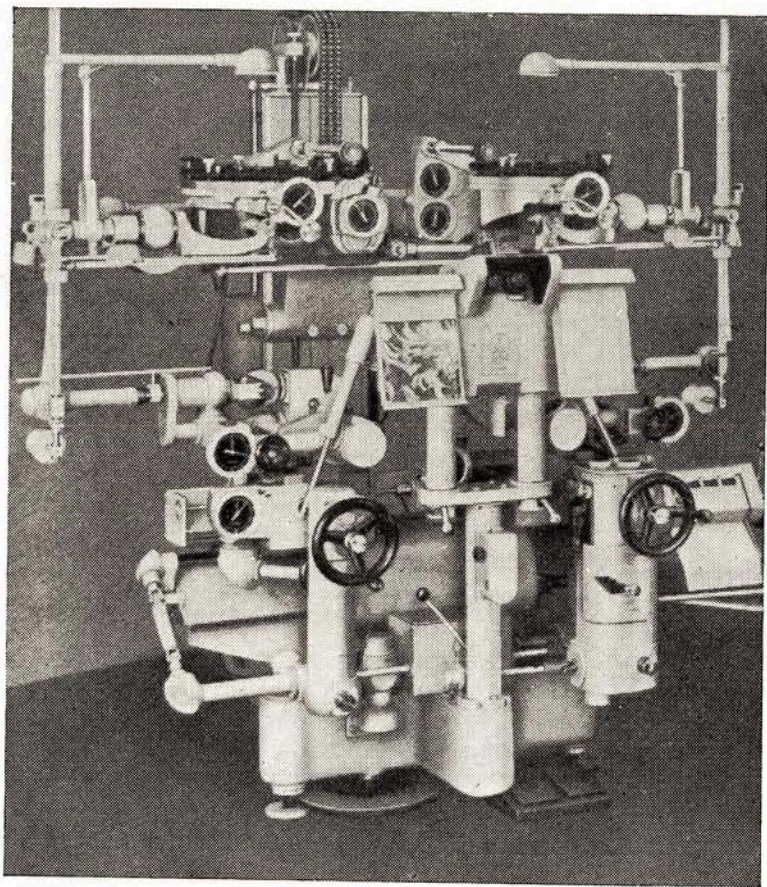


FIG. 1.5 — Estereoplanígrafo C/8

estereoscópica de p deverá ser formada no olho do operador, recolhendo a imagem esquerda em P e a direita em P' , sendo $O'_2P = O'_2P'$. Isto poderá ser bem compreendido examinando a Fig. 1.6, que representa esquematicamente o sistema ótico do estereoplanígrafo. As

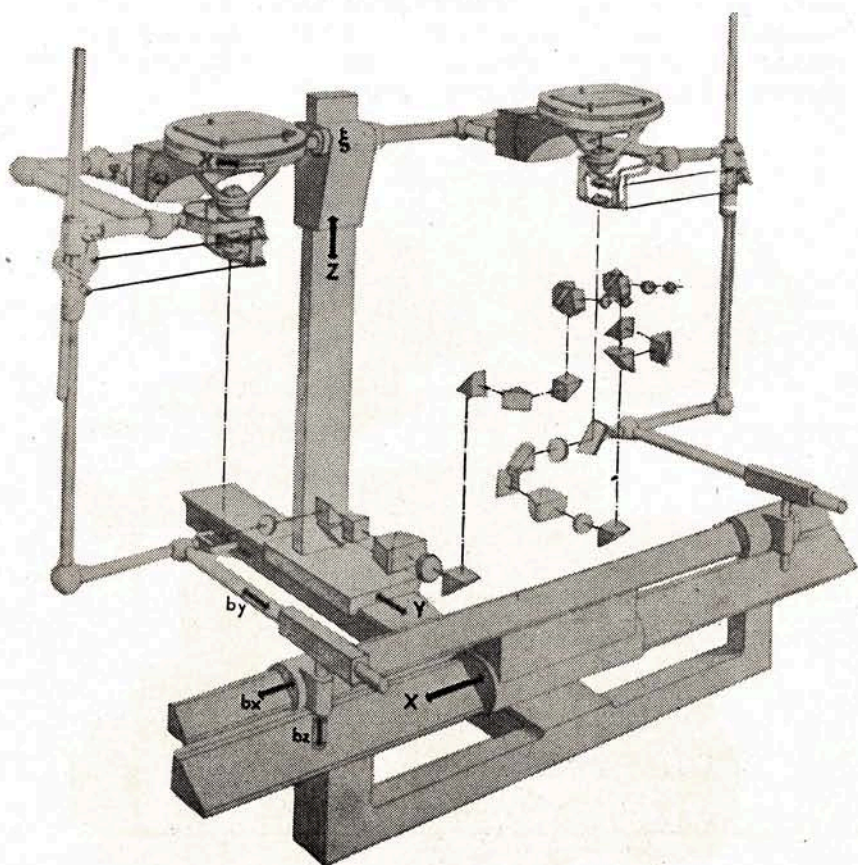


FIG. 1.6

duas projeções do ponto p realizam-se sobre dois pequenos espelhos, facilmente identificáveis, no centro dos quais se encontram as marcas estereoscópicas.

O fotoestereógrafo Beta, idealizado por Nistri é um aparelho de projeção ótico-mecânica, onde os centros de projeção são objetivas idênticas à da câmara aérea, o que constitui a base do princípio Porro-Kope; a projeção é materializada por hastes, tal como mostra a Fig. 1.4. A Fig. 1.7 mostra este aparelho, muito interessante pelos sistemas de servo-mecanismos que permitiram eliminar, em grande parte, as transmissões mecânicas. Estas, como sabemos, são sempre a parte mais crítica em todos os instrumentos de precisão.

Nos instrumentos de projeção mecânica como o Estereocartógrafo Santoni, modelo IV, e no autógrafa Wild A-7 (Fig. 1.8) as ob-

jetivas são substituídas por cardans cujos centros são os centros de projeção e as hastes atravessam esses cardans e são extensíveis dos cardans para dentro das câmaras. A Fig. 1.9 é a representação esquemática dos aparelhos de projeção mecânica.

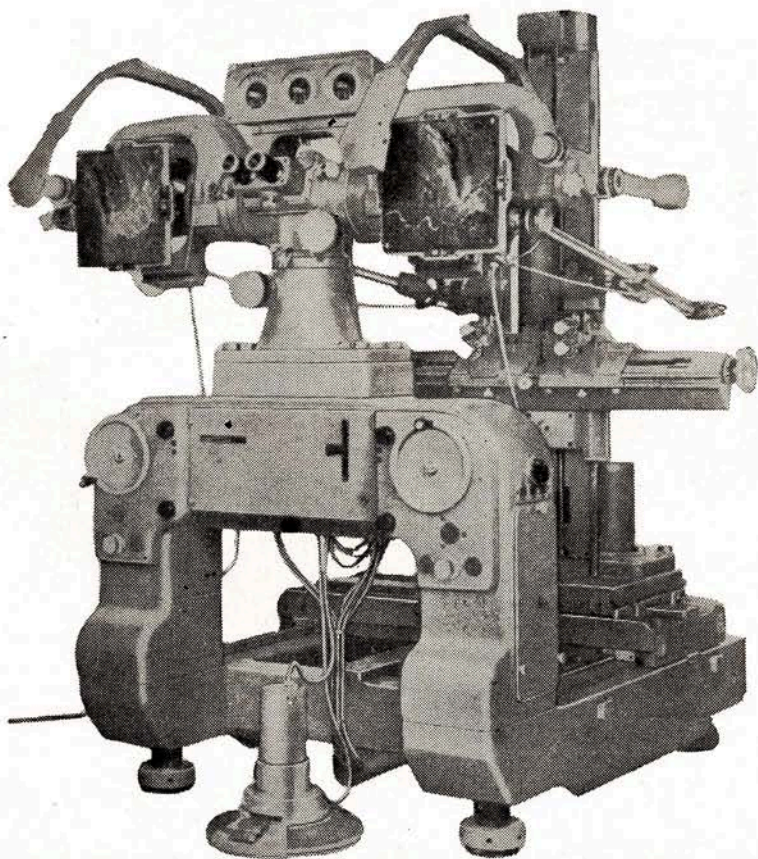


FIG. 1.7 — Fotoestereografo Beta/2

Assim rememorados os princípios em que se baseiam os aparelhos de primeira ordem, voltemos à Fig. 1.4. Com a disposição geométrica descrita, a distância O'_2O_2 será o parâmetro de orientação que substitui, no aparelho, a base b , pois, os pontos O'_2 e O_2 são extremidades de segmentos orientados e de comprimentos constantes ($O_1O'_2 = b$; $O_1O_2 = c$). Como $O_1O'_2PP'$ é um paralelogramo, o problema da introdução das componentes da base estará resolvido se pudermos ajustar, de forma constante para cada caso, as componentes $\overrightarrow{(c - bx)}$, $-\overrightarrow{by}$ e $-\overrightarrow{bz}$, do vetor $\overrightarrow{PP'}$, de tal forma que ele mantenha, para qualquer ponto do modelo, sua direção no espaço (para-

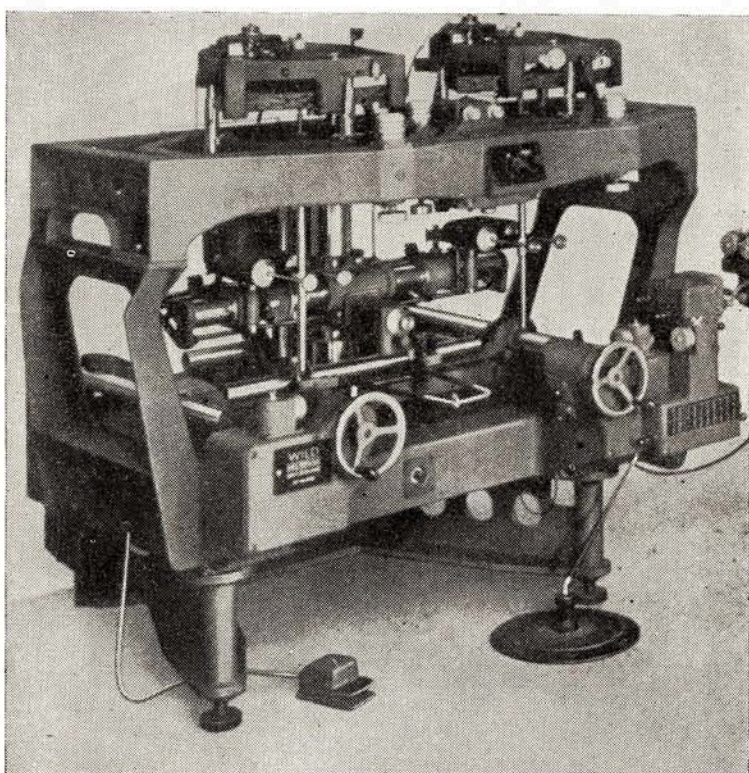


FIG. 1.8 — Autografo Wild A/7

lela a O'_2O_2) e seu módulo (igual à distância O'_2O_2), isto é, PP' deverá ter as características de um vetor *livre*. Para que isto possa ser realizado na prática, os aparelhos de primeira ordem dispõem de articulações e correções, esquematicamente representadas na Fig. 1.4, capazes de permitir a introdução das componentes da base, de tal forma que P e P' fiquem em posições invariáveis em relação ao carro C . A fim de possibilitar a medição das alturas as guias G estão fixadas a um plano suscetível de ser movido verticalmente. Resta agora esclarecer como se realiza a concatenação dos modelos sucessivos, em aparelhos munidos apenas de duas câmaras.

Suponhamos que uma vez terminada a orientação do par 1-2, se deseje passar ao par 2-3, sem tocar na orientação da câmara 2. Para isso existem, nos aparelhos de primeira ordem, sistemas óticos como, por exemplo, o de Hegershoff, destinados à transposição das imagens de uma ocular para outra. Com tal dispositivo o fotograma esquerdo será apresentado ao olho direito e vice-versa. Desta forma,

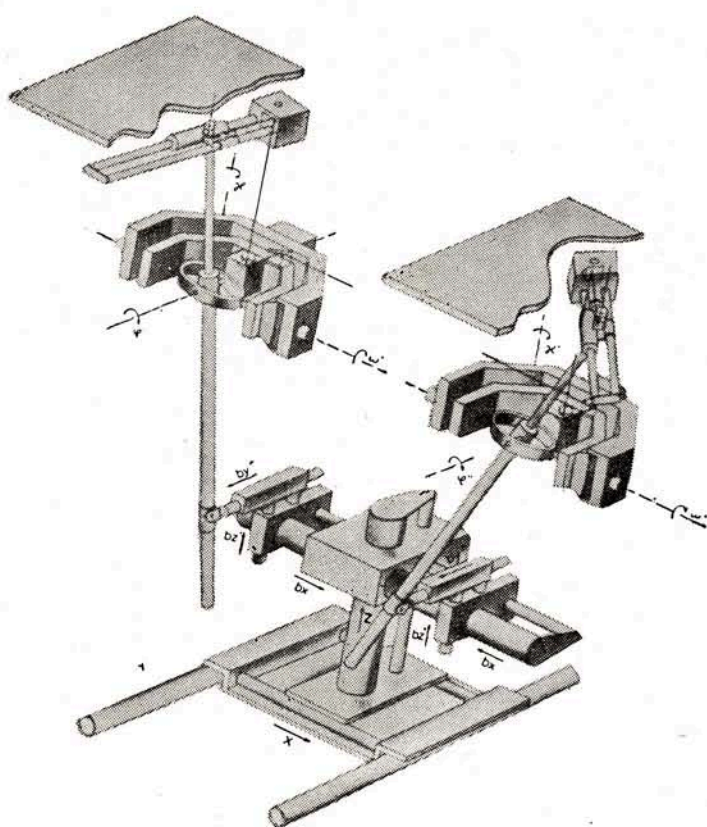


FIG. 1.9

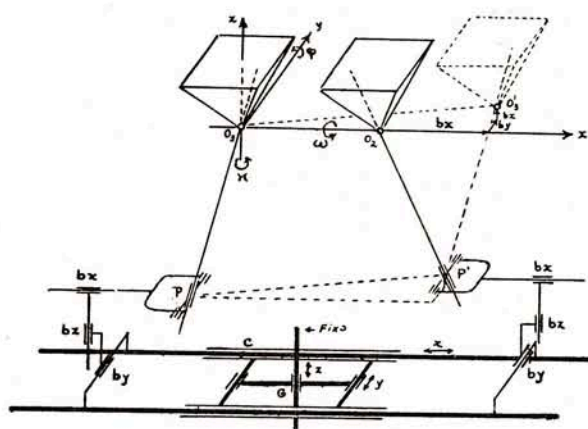


FIG. 1.10

o fotograma 1 poderá ser substituído pelo 3 e, então, tudo se passa como se O_3 (Fig. 1.10) houvesse sofrido as translações indicadas na figura. Sendo assim, $PP' = O'_3O_3$ será o vetor definido pelas componentes $(c + bx)$, $-by$ e $-bz$.

Comparando as figuras 1.4 e 1.10, verificamos que os raios luminosos dos pontos conjugados, que emergem dos centros óticos, ou as hastes que materializam êsses raios, nos aparelhos de restituição, são convergentes na primeira figura e divergentes na segunda. Além disso, o segmento que substitui a base é menor que c na Fig. 1.4 e maior que c na Fig. 1.10. No primeiro caso temos o que se denomina base *interna* ou *interior* e no segundo base *externa* ou *exterior*.

Resta esclarecer que na Fig. 1.4 indicamos, de acôrdo com o sistema de referência, os sentidos positivos das translações e rotações, estando aí indicados os símbolos que usaremos no correr dêste trabalho. Aconselhamos ao leitor guardar de memória a citada simbologia, pois, daqui por diante os movimentos serão indicados apenas pelos respectivos símbolos.

1.5 — Orientação relativa

De acôrdo com o que foi exposto no parágrafo anterior, só devemos contar com pontos de apóio, na aerotriangulação, nos pares extremos da faixa e, em alguns casos, como mais adiante mostraremos, no par central da faixa. Isto vem mostrar, por conseguinte,

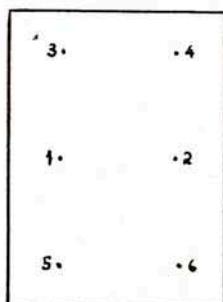


FIG. 1.11

que a precisão da concatenação dos modelos depende do grau de precisão que se possa atingir na orientação relativa dos pares não apoiados. Desta conclusão resultaram diversos estudos destinados a aperfeiçoar a orientação relativa que, para fins de restituição, poderá ser efetuada pelo método ótico-mecânico de von Gruber. Acontece, porém que êste método prevê a redução das paralaxes transversais por aproximações sucessivas, o que pode ser realizado até um certo limite, além do qual o operador não mais consegue qualquer redução das paralaxes transversais residuais. A simples operação ótico-mecânica não é *convergente*, depois de atingido aquele limite. Essa falta de convergência foi demonstrada matematicamente por W. K. Bachmann que conseguiu provar que as paralaxes residuais medidas nos pontos 3, 4, 5 e 6 (Fig. 1.11) do modelo ótico depois de orientado ótico-mecanicamente são teòricamente iguais a três vezes o êrro médio de uma observação de paralaxe. Então, só *casualmente* as paralaxes transversais serão reduzidas aos valores realmente satisfatórios para a precisão almejada. Num exemplo prático dado por

Bachmann em seu trabalho "Theorie des Erreurs de l'Orientation Relative", o autor applicou 25 vezes, a um mesmo par de fotografamas, o método ótico-mecânico e registrou os 25 valores de cada um dos parâmetros de orientação. Os resíduos de alguns dos valores em relação à respectiva média são consideráveis, atingindo por vezes aos 80°. Vemos, assim, que uma única série de aproximações pelo método ótico-mecânico fica inteiramente ao sabor dos erros acidentais. Para contornar este inconveniente Bachmann aconselha realizar independentemente 5 orientações relativas e introduzir a sua média no aparelho. Acreditamos que esta será a maneira mais lógica de aplicar o método ótico-mecânico, pois, os erros que podem ocorrer numa simples orientação, poderão ser responsáveis por descontinuidades na faixa de aerotriangulação, impossíveis de ser eliminadas por qualquer método de compensação.

Outros autores não são apologistas da solução de Bachmann, preferindo a orientação calculada, gráfica ou analiticamente. Em virtude da atual generalização desses métodos, pareceu-nos conveniente estudar teórica e praticamente alguns dos mais conhecidos e, como está sendo introduzida, com grandes possibilidades de êxito, a aerotriangulação com câmaras convergentes, abordamos também a orientação de estereogramas convergentes.

CAPÍTULO II

ESTUDO DAS PARALAXES TRANSVERSAIS

2.1 — Dedução da fórmula geral

Em virtude do recente progresso realizado na aerotriangulação com fotogramas convergentes, vamos deduzir a fórmula da paralaxe transversal para o caso geral de inclinações quaisquer e vamos mostrar que, seguindo um caminho que nos parece original, é possível simplificar consideravelmente a orientação calculada para qualquer tipo de fotogramas.

Tendo em vista que grande parte do atual progresso da aerotriangulação com fotogramas convergentes vem sendo incentivada pela casa Zeiss, desenvolveremos a nossa teoria considerando os eixos do estereoplanígrafo, onde y é o eixo primário do instrumento. De fato, a rotação φ realiza-se sempre em torno desse eixo, enquanto

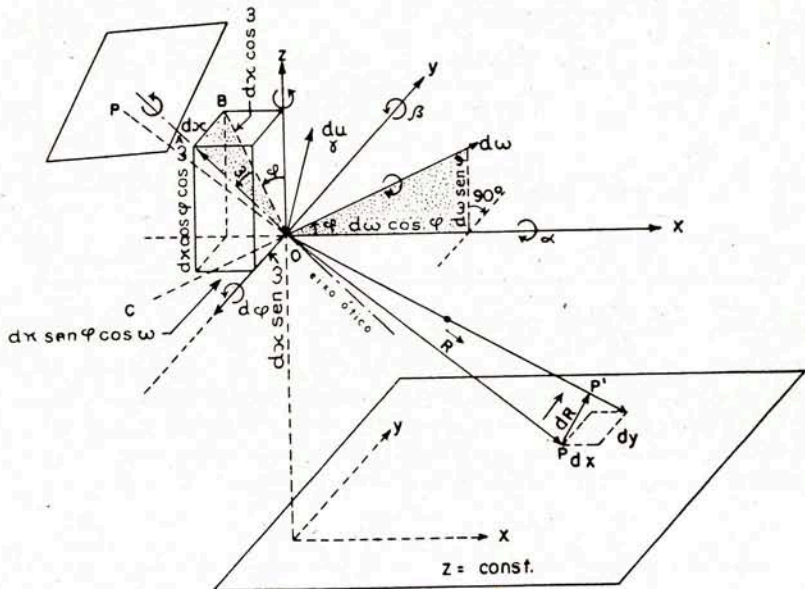


Fig. 2.1

que as outras são realizadas em torno de eixos já inclinados. A Fig. 2.1 esclarece bem o que ficou dito. Nessa figura observamos que o eixo ótico tem uma inclinação u , composta de duas outras: uma φ , no plano xz e outra ω no plano OAB , perpendicular a OC .

Suponhamos agora que seja P a imagem projetada do ponto p da foto, através da objetiva O . O vetor $\vec{R}$ define a posição de P sobre o plano $z = \text{constante}$. Se $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$ são as componentes de $\vec{R}$ segundo os três eixos e se $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são os vetores unitários ao longo dos eixos, $\vec{R}$ será expresso por

$$\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \quad (2.1a)$$

Se dermos à câmara uma rotação diferencial du , as duas componentes nos eixos de rotação do aparelho serão: $d\varphi$, em torno de Oy , $d\omega$ em torno de OC , perpendicular ao plano AOB e dk em torno do eixo ótico. As componentes de $\vec{d\omega}$, $\vec{d\varphi}$ e $\vec{dk}$ segundo os três eixos serão facilmente tiradas da Fig. 2.1 e se encontram discriminadas na tabela que se segue:

Tabela 2.1-I

	x	y	z
$\vec{dk}$	$-dk \sin\varphi \cos\omega$	$-dk \sin\omega$	$dk \cos\varphi \cos\omega$
$\vec{d\varphi}$	0	$-d\varphi$	0
$\vec{d\omega}$	$d\omega \cos\varphi$	0	$d\omega \sin\varphi$
soma = $\vec{du}$	dz	$-d\beta$	$d\gamma$

Sendo $\vec{dz}$, $-\vec{d\beta}$ e $\vec{d\gamma}$ as somas das respectivas colunas, é claro que representam as componentes da rotação geral $\vec{du}$ segundo os eixos coordenados. Conseguiremos uma notável simplificação nos nossos desenvolvimentos se operarmos sempre com essas componentes que permitem, como veremos mais adiante, generalizar a expressão da paralaxe transversal. Assim procedendo, teremos:

$$\vec{du} = \vec{i} dz - \vec{j} d\beta + \vec{k} d\gamma \quad (2.1b)$$

Estando o vetor $\vec{R}$ solidário com a câmara, a rotação du nela impressa deslocará P para P' , sendo o vetor $\vec{PP'}$, que exprime êsse deslocamento, igual ao produto vetorial de $\vec{du}$ por $\vec{R}$. Teremos assim:

$$\vec{dR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d\alpha & -d\beta & d\gamma \\ x & y & -z \end{vmatrix}$$

ou, desenvolvendo,

$$\vec{dR} = \vec{i}(-yd\gamma + zd\beta) + \vec{j}(xd\gamma + zd\alpha) + \vec{k}(xd\beta + yd\alpha) \quad (2.1c)$$

Se, agora, imprimirmos à câmara uma translação diferencial $\vec{db}$, cujas componentes segundo os três eixos coordenados sejam dbx , dby e dbz , o ponto P' sofrerá um novo deslocamento (não indicado na figura), expresso por:

$$\vec{db} = \vec{i} dbx + \vec{j} dby + \vec{k} dbz \quad (2.1d)$$

Então, a nova posição do ponto será definida, uma vez que o sistema não se deslocou com a câmara, por um vetor $\vec{R}'$ igual à soma de (2.1a), (2.1c) e (2.1d):

$$\begin{aligned} \vec{R}' &= \vec{i}(x - yd\gamma + zd\beta + dbx) \\ &+ \vec{j}(y + xd\gamma + zd\alpha + dby) \\ &+ \vec{k}(-z + xd\beta + yd\alpha + dbz) \end{aligned} \quad (2.1e)$$

Resta-nos agora determinar a nova posição da projeção de p sobre o plano $z = \text{const.}$ Ela estará, praticamente, na interseção do suporte de $\vec{R}'$ com aquele plano, logo, a nova posição de P será definida por um vetor $n\vec{R}'$, onde n é um parâmetro a determinar. De acôrdo com (2.1e), teremos:

$$\begin{aligned} n\vec{R}' &= n\vec{i}(x - yd\gamma + zd\beta + dbx) \\ &+ n\vec{j}(y + xd\gamma + zd\alpha + dby) \\ &+ n\vec{k}(-z + xd\beta + yd\alpha + dbz) \end{aligned} \quad (2.1f)$$

Se o ponto P deve estar sobre o plano $z = \text{const.}$, a componente de $n\vec{R}'$ segundo o eixo dos z deverá ser igual a essa constante, logo de (2.1f) tiramos

$$n(-z + x d\beta + y d\alpha + dbz) = -z$$

logo,

$$n = \frac{-z}{-z + x d\beta + y d\alpha + dbz}$$

$$= \left(1 - \frac{x}{z} d\beta - \frac{y'}{z} d\alpha - \frac{dbz}{z}\right)^{-1}$$

Desenvolvendo esta expressão em série e abandonando os termos de ordem superior à primeira, teremos

$$n = 1 + \frac{x}{z} d\beta + \frac{y}{z} d\alpha + \frac{1}{z} dbz$$

Substituindo esta expressão em (2.1f), efetuando os produtos e mantendo o critério de só conservar os termos de primeira ordem, resultará:

$$n\vec{R}' = \vec{i} \left[x + \frac{xy}{z} d\alpha + z \left(1 + \frac{x^2}{z^2}\right) d\beta - y d\gamma + dbx + \frac{x}{z} dbz \right]$$

$$+ \vec{j} \left[y + z \left(1 + \frac{y^2}{z^2}\right) d\alpha + \frac{xy}{z} d\beta + x d\gamma + dby + \frac{y}{z} dbz \right]$$

$$- \vec{k} z \quad (2.1g)$$

Os deslocamentos diferenciais do ponto P são representados em (2.1g) pela soma de todos os termos diferenciais que aí vemos; a soma precedida do coeficiente $\vec{i}$ será o deslocamento dx e a precedida de $\vec{j}$ o deslocamento dy que é o que justamente aqui nos interessa:

$$dy = z \left(1 + \frac{y^2}{z^2}\right) d\alpha + \frac{xy}{z} d\beta + x d\gamma + dby + \frac{y}{z} dbz \quad (2.1h)$$

Se fizéssemos um novo desenvolvimento considerando a outra câmara que projetaria o raio homólogo de P, para a formação da imagem estereoscópica, o novo vetor $\vec{R}$ teria como componente segundo o eixo dos x o vetor $(x-bx)$ ou, como as outras componentes da base são sempre pequenas, simplesmente $(x-b)$. Então, para obtermos o deslocamento dy' do ponto P para a câmara de vante, bastará substituir em (2.1h) x por $(x-b)$ e identificar com (') os parâmetros dessa câmara. Assim procedendo, teremos para dy' :

$$dy' = z(1 + \frac{y^2}{z^2})d\alpha' + \frac{(x-b)y}{z} d\beta' + (x-b)d\gamma' + dby' + \frac{y}{z} dbz' \quad (2.1i)$$

A diferença $(dy - dy')$, fornecida subtraindo (2.1i) de (2.1h) será a equação geral da paralaxe transversal, num par de fotogramas com inclinações quaisquer. Sucede, porém, que os parâmetros de orientação devem ser introduzidos nos aparelhos a fim de eliminar as paralaxes, logo, o que nos interessa realmente é a diferença $(dy' - dy)$. Este valor, que designaremos por p , será particularizado para a aeropoligonação e para o aeronivelamento e o aerocaminhamento. No primeiro caso a câmara de ré fica imóvel, sendo todos os movimentos dados à câmara de vante. Teremos assim $dy=0$ e, de acôrdo com (2.1i), resultará:

$$p = z(1 + \frac{y^2}{z^2})d\alpha' + \frac{(x-b)y}{z} d\beta' + (x-b)d\gamma' + dby' + \frac{y}{z} dbz' \quad (2.1j)$$

No caso do aeronivelamento a componente bz da base é fornecida pelo estatoscópico e é considerada sem êrro, logo, teremos aí $dbz=0$. No caso do aerocaminhamento mantem-se $bz=0$ durante tôda a operação instrumental e, da mesma forma, teremos aqui $dbz=0$. Em vista da invariabilidade de bz a eliminação das paralaxes só poderá ser efetuada completamente dando à câmara de ré, já orientada, uma inclinação $d\beta$; assim, a expressão (2.1h) reduz-se, neste caso, a

$$dy = \frac{xy}{z} d\beta$$

Então, a paralaxe transversal, nos casos de aeronivelamento e de aerocaminhamento, será obtida subtraindo esta expressão da (2.1i) e fazendo $dbz=0$:

$$p = z(1 + \frac{y^2}{z^2})d\alpha' + \frac{(x-b)y}{z} d\beta' - \frac{xy}{z} d\beta + (x-b)d\gamma' + dby' \quad (2.1k)$$

Examinando as expressões (2.1j) e (2.1k) verificamos que se observarmos os valores de p em cinco pontos do modelo ótico, obteremos cinco equações análogas que permitirão obter todos os parâmetros de orientação. Mas, como $d\alpha$, $d\beta$ e $d\gamma$ são rotações primárias, ou sejam, rotações efetuadas em tôrno dos eixos coordenados e não em tôrno dos eixos de rotação do aparelho, será necessário transformá-las em $d\omega$, $d\phi$ e dk . Esses parâmetros serão as incógnitas do seguinte sistema, formado com o auxílio da tabela 2.1-I:

$$\begin{aligned}d\alpha &= -d\kappa \sin\varphi \cos\omega & + d\omega \cos\varphi \\d\beta &= d\kappa \sin\omega & + d\varphi \\d\gamma &= d\kappa \cos\varphi \cos\omega & + d\omega \sin\varphi\end{aligned}\tag{2.1m}$$

Ora, como os valores de φ e ω durante o vôo são nulos ou devidamente prefixados, o sistema acima poderá ser resolvido determinando a priori os coeficientes numéricos com que podemos exprimir as incógnitas em função dos termos conhecidos, mediante expressões da forma

$$\begin{aligned}d\omega &= a_1 d\alpha + b_1 d\beta + c_1 d\gamma \\d\varphi &= a_2 d\alpha + b_2 d\beta + c_2 d\gamma \\d\kappa &= a_3 d\alpha + b_3 d\beta + c_3 d\gamma\end{aligned}$$

onde a_1 , b_1 e c_1 são justamente os coeficientes a serem preliminarmente determinados.

No caso de fotogramas convergentes teremos sempre $\omega=0$ e $\varphi' = -\varphi$ e o sistema (2.1m) transforma-se em

$$\begin{aligned}d\alpha' &= -d\kappa' \sin\varphi' + d\omega' \cos\varphi' \\d\beta' &= d\varphi' \\d\gamma' &= d\kappa' \cos\varphi' + d\omega' \sin\varphi'\end{aligned}$$

que resolvido fornece:

$$\begin{aligned}d\omega' &= d\alpha' \cos\varphi' + d\gamma' \sin\varphi' \\d\varphi' &= d\beta' \\d\kappa' &= -d\alpha' \sin\varphi' + d\gamma' \cos\varphi'\end{aligned}\tag{2.1n}$$

No caso das câmaras Zeiss, cuja convergência é de 30g, teremos $\varphi' = -15g$ e, então

$$\begin{aligned}d\omega' &= 0,9724 d\alpha' - 0,2324 d\gamma' \\d\kappa' &= -0,2324 d\alpha' - 0,9724 d\gamma' \\d\varphi' &= d\beta'\end{aligned}\tag{2.1o}$$

As duas primeiras expressões do grupo acima podem servir ao traçado de ábacos de pontos alinhados cuja escala não precisará ser muito grande para que possamos obter $d\omega'$ e $d\kappa'$ em função de $d\alpha'$ e $d\gamma'$ com a precisão necessária.

Desejamos chamar atenção para o fato de que o desenvolvimento apresentado, que nos parece ser original, abre novos horizontes para a generalização da orientação calculada de fotogramas quaisquer, uma vez que as expressões (2.1j) e (2.1k) são absolutamente análogas às que são obtidas para fotogramas verticais. De fato, a tabela 2.1-I nos mostra que para $\varphi = \omega = 0$ teremos sempre

$$\begin{aligned}d\alpha &= d\omega \\d\beta &= d\varphi \\d\kappa &= d\gamma\end{aligned}$$

2.2 — Escolha dos pontos para observação das paralaxes

As paralaxes transversais devem ser observadas em pontos escolhidos de tal forma que as fórmulas (2.1j) e (2.1k) fiquem simplificadas pela anulação de alguns termos. Os pontos que melhor satisfazem a tal requisito são os situados nas interseções dos planos verticais $x = 0$ e $x = b$, que passam pelos centros de projeção, com os planos $y=0$, $y=a$ e $y=-a$ (Fig. 2.2), devendo a ser o maior possível. A tabela 2.2-I mostra os coeficientes dos parâmetros de orientação para os pontos escolhidos. Examinando a tabela 2.2-I verificamos que estão tabulados os coeficientes de $d\beta$ e de dbz' . Mas, pelo que ficou dito anteriormente, os coeficientes de $d\beta$ serão nulos quando se tratar de aeropoligonação e os de dbz' o serão nos casos de aeronivelamento e aerocaminhamento.

TABELA 2.2-I

	x	y	$d\gamma'$	$d\beta$	$d\beta'$	$d\alpha'$	dby'	dbz'
1	0	0	$-b$			z	1	
2	b	0				z	1	
3	0	a	$-b$		$-ab/z$	$z(1+a^2/z^2)$	1	a/z
4	b	a		$-ab/z$		$z(1+a^2/z^2)$	1	a/z
5	0	$-a$	$-b$		ab/z	$z(1+a^2/z^2)$	1	$-a/z$
6	b	$-a$		ab/z		$z(1+a^2/z^2)$	1	$-a/z$

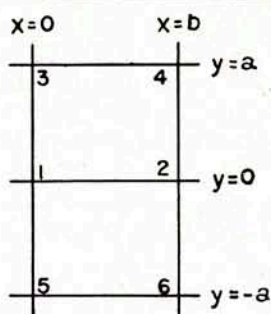


Fig. 2.2

Antes, porém de iniciar tal estudo, são ainda necessários alguns esclarecimentos de ordem prática.

A fim de que as expressões deduzidas tenham caráter geral, é mister frisar que a numeração dos pontos escolhidos para a medida das paralaxes seja feita no *modelo projetado* e não na foto. De fato, o modelo estereoscópico produzido pela projeção de negativos apresenta-se como se fosse uma imagem real do terreno em escala reduzida. Para essa situação é que são deduzidas as fórmulas da orien-

A disposição dos pontos mostrada na Fig. 2.2 é essencial à aplicação dos métodos puramente numéricos de orientação relativa e também à do denominado semicalculado-simétrico. Nos métodos gráficos a observação das paralaxes poderá ser efetuada em pontos escolhidos com maior liberdade.

Acreditamos que com a exposição feita poderemos estudar com segurança tôdas as soluções analíticas da orientação relativa que abordaremos nos próximos capítulos.

tação relativa calculada. Ora, os diapositivos de contato já em si apresentam uma imagem real do terreno e sua projeção será uma imagem especular do mesmo, como se a Fig. 2.2 fosse girada em torno do eixo 1-2, de 180° . Isso importaria na necessidade de trocar, nas fórmulas deduzidas, os elementos referentes aos pontos 3 e 4 pelos relativos aos 5 e 6, respectivamente, e vice-versa, caso os pontos houvessem sido numerados tendo em vista suas posições na cópia fotográfica. Numerando, porém, os pontos de acordo com as respectivas posições no modelo projetado, as fórmulas deduzidas serão invariavelmente as mesmas, quer trabalhem com diapositivos de contato quer com negativos.

2.3 — Medição das paralaxes

Na medição das paralaxes é imprescindível atentar para os seus sinais, pois, do contrário, corre-se o risco de perder todo o trabalho. Para estabelecer a convenção necessária à atribuição dos sinais exa-

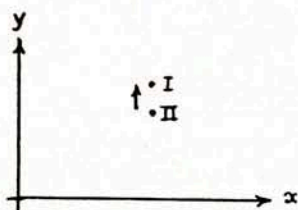


FIG. 2.3

minemos a Fig. 2.3, onde se acham representados os eixos planimétricos do aparelho, com os respectivos sentidos de crescimento das leituras, bem como os pontos I e II projetados pelas câmaras esquerda e direita, respectivamente. Se admitimos que a figura corresponde a um par de uma aerotriangulação que progride para a direita, I-II representa o erro em y

devido à desorientação da câmara de vante em relação à de ré. Consequentemente, II-I será a correção a ser dada indiretamente à imagem II, sendo o vetor II-I a paralaxe transversal a ser medida diretamente, dando à câmara de vante um movimento em by para anular a paralaxe; esse deslocamento, medido na graduação própria, será o valor absoluto da paralaxe transversal. Vejamos, então como determinar seu sentido.

A Fig. 1.4 mostra que sendo by e bz introduzidos na própria projeção, seus sentidos de crescimento são opostos aos que teriam se os introduzissemos na câmara. É claro, porém, que a graduação para a medida desses elementos poderá estar materialmente invertida e, assim, tudo se passa como se medissemos o deslocamento da câmara. Em vista disso convencionaremos que essas inversões já se acham corrigidas no próprio aparelho e nos casos em que isso, porventura, não aconteça, chamaremos atenção para o fato.

Se a posição da câmara de vante, que corresponde à situação representada na Fig. 2.3, é tal que a componente transversal da base corresponde a uma leitura by_1 , o deslocamento transversal necessário a levar II a coincidir com I acarretará uma nova leitura by_2 e, de acôrdo com as convenções estabelecidas, a paralaxe será dada por

$$p = by_2 - by_1 \quad (2.4)$$

Nos métodos de orientação de Poivilliers onde as paralaxes transversais são anuladas nos pontos escolhidos fora da base por meio de deslocamento verticais das câmaras ou dos centros P ou P' (Figs. 1.4 e 1.10) dos cardans da base, será também imprescindível atentar para os sinais desses deslocamentos.

CAPÍTULO III

ORIENTAÇÃO RELATIVA NUMÉRICA

3.1 — Método de Jerie, modificado

Dos métodos numéricos que conhecemos o de Jerie é o mais completo, pois, leva em conta, sem introduzir complicações intransponíveis, os desníveis entre os pontos 1 a 6 (Fig. 2.2). Iniciaremos nosso estudo por esse método, no qual introduziremos uma modificação de que resulta maior simplicidade e dispensa a utilização de um gráfico existente no original.

Examinando a tabela 2.2-I verificamos que se levarmos em conta as diferenças de nível entre os pontos 1 a 6 (Fig. 2.2), teremos que considerar os valores individuais de z . Assim sendo, as relações y/z para os pontos 3 a 6 serão diferentes mas poderão ser substituídas pela respectiva média, ou seja

$$[y/z]/4 = k$$

Então, a relação a/z que figura na Tabela 2.2-I será substituída por k e podemos fazer ainda

$$1 + k^2 = K \quad (3.1a)$$

Operando essas substituições na tabela supracitada, poderemos dela tirar

$$p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = (z_3K + z_4K + z_5K + z_6K)d\alpha' - 2b \, d\gamma + 4db\gamma'$$

$$2(p_1 + p_2) = (2z_1 + 2z_2)d\alpha' - 2b \, d\gamma' + 4db\gamma'$$

donde

$$d\alpha' = \frac{p_3 + p_4 + p_5 + p_6 - 2p_1 - 2p_2}{z_3K + z_4K + z_5K + z_6K - 2z_1 - 2z_2} \quad (3.1b)$$

Da mesma tabela tiramos ainda para a aeropoligonação ($d\beta = 0$):

$$p_2 + p_4 + p_6 = (z_2 + z_4K + z_6K)d\alpha' + 3db\gamma'$$

$$p_4 - p_6 = (z_4K - z_6K)d\alpha' + 2kdbz'$$

$$p_1 + p_3 + p_5 - p_2 - p_4 - p_6 = [(z_1 + z_3K + z_5K) - (z_2 + z_4K + z_6K)]d\alpha - 3bd\gamma'$$

$$p_3 - p_5 - p_4 + p_6 = (z_3K - z_5K - z_4K + z_6K)d\alpha' - 2kb \, d\beta'$$

donde obtemos facilmente

$$dby' = [(p_2 - z_2 d\alpha') + (p_4 - z_4 K d\alpha') + (p_6 - z_6 K d\alpha')]/3 \quad (3.1c)$$

$$dbz' = [(p_4 - z_4 K d\alpha') - (p_6 - z_6 K d\alpha')]/2k \quad (3.1d)$$

$$d\gamma' = -[(p_1 - z_1 d\alpha') + (p_3 - z_3 K d\alpha') + (p_5 - z_5 K d\alpha') - (p_2 - z_2 d\alpha') - (p_4 - z_4 K d\alpha') - (p_6 - z_6 K d\alpha')]/3b \quad (3.1e)$$

$$d\beta' = -[(p_3 - z_3 K d\alpha') - (p_5 - z_5 K d\alpha') - (p_4 - z_4 K d\alpha') + (p_6 - z_6 K d\alpha')]/2kb \quad (3.1f)$$

É claro que uma vez observadas as paralaxes nos pontos 1 a 6 ficamos conhecendo todos os elementos a introduzir em (3.1b) para o cálculo de $d\alpha'$ e, como mostram as expressões (3.1c) a (3.1f), as demais correções poderão ser também determinadas depois de conhecido $d\alpha'$. Se fizermos, para maior facilidade

$$\begin{aligned} p_1 - z_1 d\alpha' &= p'_1 \\ p_2 - z_2 d\alpha' &= p'_2 \\ p_i - z_i K d\alpha' &= p'_i \end{aligned} \quad (3.1g)$$

as expressões (3.1c) a (3.1f), que resolvem o problema da aeropoligonização, transformam-se em

$$dby' = (p'_2 + p'_4 + p'_6)/3 \quad (3.1h)$$

$$dbz' = (p'_4 - p'_6)/2k \quad (3.1i)$$

$$d\gamma' = -(p'_1 + p'_3 + p'_5 - p'_2 - p'_4 - p'_6)/3b \quad (3.1j)$$

$$d\beta' = -(p'_3 - p'_5 - p'_4 + p'_6)/2kb \quad (3.1k)$$

Nos casos de aeronivelamento e aerocaminhamento teremos $dbz' = 0$ e as inclinações longitudinais das câmaras serão tiradas da tabela 2.2-I da mesma forma que obtivemos as expressões (3.1h) a (3.1k). São elas expressas por

$$d\beta' = -(p_3 - p_5)/2kb \quad (3.1m)$$

$$d\beta = -(p_4 - p_6)/2kb \quad (3.1n)$$

É oportuno recordar que as paralaxes transversais são obtidas subtraindo o valor de by lido no aparelho no ponto 1 dos valores de by lidos nos demais pontos. Mas, examinando as expressões que fornecem $d\alpha'$, $d\beta'$ e $d\gamma'$ verificamos que contém número par de valores de p , sendo a metade deles positiva e metade negativa; logo, não haverá qualquer modificação dos resultados se nessas fórmulas substituirmos diretamente p por by . Quanto às correções dby e dbz , as fórmulas que as fornecem mostram que se operarmos as mesmas substituições, em lugar de obtermos dby e dbz teremos diretamente as leituras by e bz a serem introduzidas no aparelho.

Em seu trabalho intitulado "Beitrag zu numerischen Orientierungs verfahren für gebirgiges Gelände", publicado na revista "Pho-

togrammetria”, Jerie apresenta um exemplo prático do método de orientação exposto, operado num par de fotogramas verticais projetados num autógrafo Wild A7. Servir-nos-emos aqui dêsse mesmo exemplo que nos permitiu obter exatamente os mesmos resultados, apesar da considerável simplificação que introduzimos na fórmula para o cálculo de $d\alpha'$. Sendo os fotogramas verticais e considerando o sentido de crescimento dos parâmetros no autógrafo Wild A7, teremos no presente caso

$$\begin{aligned}d\alpha &= -d\omega \\d\beta &= -d\varphi \\d\gamma &= -d\kappa \\dbz &= -dbz\end{aligned}$$

Acreditamos que o exemplo apresentado seguindo, com pequenas alterações o modelo preconizado por Jerie, dispensa maiores esclarecimentos. Quanto às referências à hipótese relativa a terreno plano, o próximo parágrafo tratará dos detalhes.

3.2 — Orientação numérica para terreno plano

Se considerarmos que as diferenças de nível entre os pontos 1 a 6 podem ser desprezadas em face da altura de voo, é viável introduzir consideráveis simplificações nas fórmulas deduzidas no parágrafo precedente. Nesse caso teremos $z = \text{constante}$ e a expressão (3.1a) transforma-se em

$$d\alpha' = (p_3 + p_4 + p_5 + p_6 - 2p_1 - 2p_2)/4ak \quad (3.2a)$$

e as expressões (3.1c) a (3.1f) transformam-se em:

$$dby' = [p_2 + p_4 + p_6 - z(1 + 2K)d\alpha']/3 \quad (3.2b)$$

$$dbz' = (p_4 - p_6)/2k \quad (3.2c)$$

$$d\gamma' = -(p_1 + p_3 + p_5 - p_2 - p_4 - p_6)/3b \quad (3.2d)$$

$$d\beta' = -(p_3 - p_5 - p_4 + p_6)/2kb \quad (3.2e)$$

que resolvem o caso da aeropoligonação e, para o aeronivelamento e o aerocaminhamento substituiremos dbz' e $d\beta'$ por

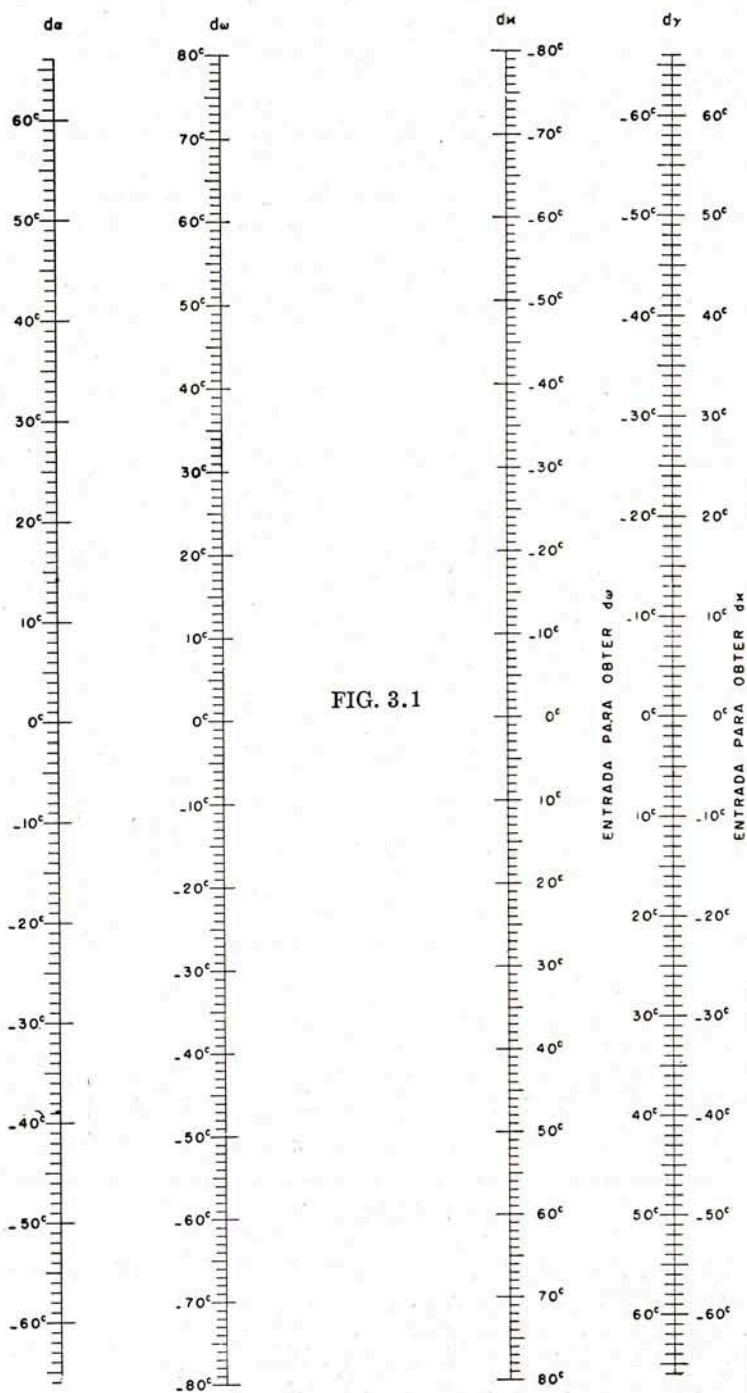
$$d\beta = -(p_4 - p_6)/2kb \quad (3.2f)$$

$$d\beta' = -(p_3 - p_5)/2kb \quad (3.2g)$$

É claro que as correções angulares acima expressas em radianos deverão, tal como mostra o exemplo já resolvido no parágrafo precedente, ser multiplicadas por 6366c que é o número de minutos centesimais que contém o radiano.

Aplicando as fórmulas acima ao exemplo antes resolvido, encontramos

$$\begin{aligned}-d\alpha' &= d\omega' = 21,2 \\&\quad dby' = 0,18 \\&\quad dbz' = -0,08 \\-d\gamma' &= d\kappa' = 12,9 \\-d\beta' &= d\varphi' = 29,0\end{aligned}$$



êstes resultados não são nada confortantes, pois a correção dbz' , extremamente importante nas aeropoligonações, apresenta uma discrepância de 0,16 mm, que nos parece exagerada pois essa discrepância será responsável por um erro na inclinação longitudinal do par. Por outro lado, se tomarmos como referência da altimetria o ponto mais baixo ($z=421$), teremos um desnível máximo de 53 mm entre os pontos 3 e 6, o que representa, em porcentagem ($53/421$), 12,7% da altura de vôo. Não nos parece que tal desnível seja muito exagerado, pois representa num vôo executado a 5.000 m de altura, um desnível igual a 655 m. No final do capítulo voltaremos a êste assunto.

3.3 — Orientação relativa de fotogramas convergentes

A orientação de fotogramas convergentes processa-se rigorosamente como a dos verticais, sendo determinados preliminarmente $d\alpha'$, $d\beta'$ e $d\gamma'$ que, sendo as rotações primárias, necessitam ser transformadas nas reais. Para o estereoplanígrafo (eixo primário Oy) temos dbz negativo e $d\beta = -d\varphi$ e a passagem de $d\alpha'$ e $d\gamma'$ para $d\omega'$ e $d\kappa'$ faz-se utilizando o ábaco da Fig. 3.1 construído com as duas primeiras expressões de (2.10).

Daremos a seguir um exemplo prático tirado da agenda Zeiss considerando o terreno plano:

EXEMPLO PRÁTICO

$a = 160 \text{ mm}$ $[a/z]/4 = k = 0,41$ $1/2k = 1,22$ $b = 220$ $K = 1 + k^2 =$ $\rho/2bk = 35,3$ $z = 380$ $2k = 0,82$ $\rho/4ak = 24,2$ $3b = 660$ $2bk = 180,0$ $\rho/3b = 9,6$ $\varphi = 6366''$ $4ak = 262,5$					
	by				
1	30,00	$d\alpha' = (p_3 + p_2 + p_5 + p_6 - 2p_1 - 2p_2)\varphi/4ak$		0,26	6,3
3	30,12	$dbz' = (p_4 - p_6)/2k$	—	0,20	—0,24
5	30,16	$d\gamma' = -(p_1 + p_3 + p_5 - p_2 - p_4 - p_6)\varphi/3b$		—0,09	—0,86
2	30,07	$d\beta' = -(p_3 - p_5 - p_4 + p_6)\varphi/2bk$	—	—0,16	—5,6
4	29,96				
6	30,16	Do ábaco: $d\omega' = 6,^{\circ}3$ $d\kappa' = -0,^{\circ}6$ $d\varphi' = -d\beta'$			

by: ótico-mecânico

Convém esclarecer que as fórmulas (2.10) que serviram ao preparo do monograma da Fig. 3.1, foram deduzidas considerando Oy como eixo primário do instrumento, que é o caso do estereoplanígrafo. Para o autógrafo Wild A7 e a maioria dos outros instrumentos de primeira ordem o eixo primário é Ox. Das fórmulas deduzidas

por Zeller, considerando os sentidos dos movimentos do autógrafo, tiramos as expressões que se seguem, e que constituem o sistema a resolver nesse caso:

$$\begin{aligned} dz' &= -d\omega - dk \operatorname{sen} \varphi \\ d\beta' &= -d\varphi \cos \omega + dk \cos \varphi \operatorname{sen} \omega \\ d\gamma' &= d\varphi \operatorname{sen} \omega + dk \cos \varphi \cos \omega \end{aligned}$$

3.4 — Simplificação da técnica para fotogramas verticais e terreno plano

Tendo em vista que a grande maioria das aerotriangulações é realizada com fotogramas verticais, é interessante mostrar como é possível simplificar a técnica da orientação numérica, desde que o terreno possa ser considerado plano.

Reduzidas as paralaxes transversais pelo método ótico mecânico, é sempre possível anulá-las na base e nos pontos característicos de uma das metades do modelo ótico, sem recorrer a qualquer tentativa. De fato, supondo uma aeropoligonação que progride da esquerda para a direita, podemos anular as paralaxes restantes em 2 e 1 com b_y e κ' , respectivamente, em 4 com $b_{z'}$ e em 3 com φ' . Uma vez que ao anularmos essas paralaxes elas já são pequenas, as operações não terão reflexos mútuos, isto é, as paralaxes serão anuladas nos pontos 1, 2, 3 e 4, simultaneamente. Restarão, assim as paralaxes em 5 e 6 e as expressões (3.2a) a (3.2e) reduzem-se a

$$d\omega' = (p_5 + p_6)/4ak \quad (3.4a)$$

$$db_y' = p_6 - z(1 + 2K)d\omega' \quad (3.4b)$$

$$db_{z'} = -p_6/2k \quad (3.4c)$$

$$d\kappa' = -(p_5 - p_6)/3b \quad (3.4d)$$

$$d\varphi' = (p_5 - p_6)/2kb \quad (3.4e)$$

Tratando-se de aeronivelamento ou aerocaminhamento, a orientação será feita sem tocar em b_z e as fórmulas finais serão as mesmas para $d\omega'$, db_y' e $d\kappa'$ enquanto que as de $db_{z'}$ e $d\varphi'$ serão substituídas por

$$d\varphi = p_6/2kb \quad (3.4f)$$

$$d\varphi' = p_5/2kb \quad (3.4g)$$

Na prática introduzem-se no aparelho os parâmetros angulares calculados e, em seguida, os lineares (db_y e db_z) ótico-mecanicamente. Como vemos, a simplificação é realmente notável, pois basta medir duas únicas paralaxes para obter as correções de todos os parâmetros de orientação.

3.5 — Precisão da orientação numérica

Vamos abordar o estudo da precisão da orientação numérica tratando do caso geral, estudado em 3.1. Examinando a tabela 2.2-I

verificamos que existem dois caminhos para determinar $d\alpha'$. De fato, em função das paralaxes medidas em 1, 3 e 5, fazendo, como antes,

$$1 + a^2/z^2 = K$$

tiramos da tabela 2.2-I

$$2p_1 - p_3 - p_5 = (2z_1 - Kz_3 - Kz_5) d\alpha'_1$$

e, da mesma forma, teremos

$$2p_2 - p_4 - p_6 = (2z_2 - Kz_4 - Kz_6) d\alpha'_2$$

ou, fazendo

$$\begin{aligned} 2z_1 - Kz_3 - Kz_5 &= A \\ 2z_2 - Kz_4 - Kz_6 &= B \end{aligned} \quad (3.5a)$$

$$2p_1 - p_3 - p_5 = A d\alpha'_1 \quad (3.5b)$$

$$2p_2 - p_4 - p_6 = B d\alpha'_2 \quad (3.5c)$$

Caso não existissem os erros acidentais, os valores de $d\alpha'$ tirados das duas expressões precedentes seriam iguais. Isto, porém, não acontece na prática e, assim, poderemos deduzir de (3.5b) e (3.5c)

$$(2p_1 - p_3 - p_5)/A - (2p_2 - p_4 - p_6)/B = \Delta d\alpha'$$

Consequentemente, introduzindo as correções calculadas dos parâmetros, restarão paralaxes residuais que, de acordo com a expressão precedente, serão expressas por

$$(2p''_1 - p''_3 - p''_5)/A - (2p''_2 - p''_4 - p''_6)/B = -\Delta d\alpha' \quad (3.5d)$$

O cálculo dessas paralaxes residuais será, pois, um problema de observações condicionadas, sendo (3.5d) sua equação de condição. Designando por C o fator correlativo, teremos de (3.5d) as seguintes equações correlativas:

$$\begin{aligned} p''_1 &= (2/A)C & p''_2 &= -(2/B)C \\ p''_3 &= (-1/A)C & p''_4 &= (1/B)C \\ p''_5 &= (-1/A)C & p''_6 &= (1/B)C \end{aligned} \quad (3.5e)$$

e a equação normal

$$(6/A^2 + 6/B^2)C = -\Delta d\alpha'$$

donde

$$C = -\frac{\Delta d\alpha'}{6} \frac{A^2 B^2}{A^2 + B^2} \quad (3.5f)$$

O erro médio de uma paralaxe observada será dado por $\sqrt{[p''p'']/r}$, onde r é o número de equações de condição, no caso, igual a 1. Consequentemente, de (3.5e) tiramos

$$[p''p''] = (6/A^2 + 6/B^2)C^2$$

ou, de acôrdo com (3.5f),

$$[p''p''] = \frac{\Delta}{6} \frac{dz'}{A^2 + B^2} \quad (3.5g)$$

então,

$$m_0 = \sqrt{p''p''} = \pm \frac{\Delta}{6} \frac{dz'}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3.5h)$$

A segunda fração do segundo membro pode ser calculada gráficamente com extrema facilidade. De fato ela é a altura de um triângulo retângulo em que os catetos são A e B. No exemplo prático do parágrafo 3.1 as duas parcelas que formam u são os primeiros membros de (3.5b) e (3.5c) e as que formam v são A e B, então,

$$d\alpha'_1 = -0,37/128 = -0,00289$$

$$d\alpha'_2 = -0,38/120 = -0,00317$$

e

$$\Delta d\alpha' = 0,00028$$

enquanto que a fração constituída pelos elementos A e B será obtida

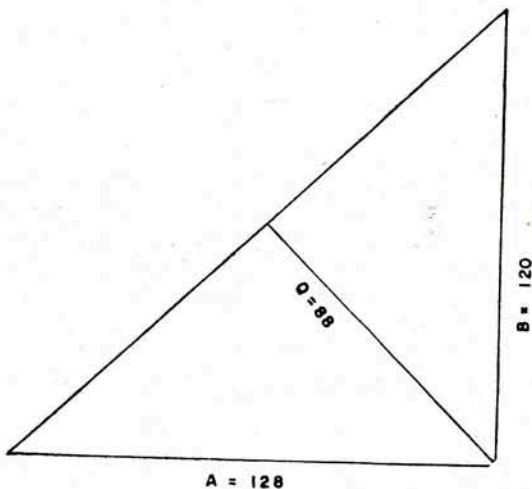


FIG. 3.2

do gráfico da Fig. 3.2, estando aí designada por Q; a escala empregada é de 1:2. Introduzindo êsses elementos em (3.5h) encontramos

$$m = \pm 0,01 \text{ mm}$$

o que representa, sem dúvida, um belo resultado.

Se o terreno puder ser considerado plano, teremos $z = \text{constante}$ e, como mostram as expressões (3.5a), $A = B$. Como consequência imediata, (3.5f) transforma-se em

$$C = - \frac{\Delta}{6} \frac{dz'}{2}$$

e do grupo (3.5e) concluimos:

$$p''_1 = -p''_2 = - \frac{A\Delta dz'}{6} \quad (3.5i)$$

$$p''_3 = p''_5 = -p''_4 = -p''_6 = -p''_1/2 = \frac{A\Delta d\alpha'}{12}$$

por outro lado, das expressões (3.5b) e (3.5c), para $z=\text{const.}$, tiramos

$$\Delta d\alpha' = (2p_1 - p_3 - p_5 - 2p_2 + p_4 + p_6)/A$$

e, então,

$$p''_1 = -(2p_1 - 2p_2 - p_3 + p_4 - p_5 + p_6)/6 \quad (3.5j)$$

logo, se m_0 é o erro médio de uma observação de paralaxe, poderemos aplicar a (3.5j) a lei de propagação de erros e escrever, de acôrdo com (3.5i)

$$m_{p''_1} = m_{p''_2} = \pm m_0/\sqrt{3} \quad (3.5k)$$

$$m_{p''_3} = m_{p''_4} = m_{p''_5} = m_{p''_6} = \frac{1}{2}m_{p''_1} = \pm m_0/2\sqrt{3}$$

Estudando a precisão do método ótico-mecânico aplicado a terreno plano, Bachmann concluiu que os erros médios das paralaxes residuais são expressos por

$$m_{p''_1} = m_{p''_2} = m_0$$

$$m_{p''_3} = m_{p''_4} = m_{p''_5} = m_{p''_6} = \frac{1}{\sqrt{3}}m_{p''_1} = m_0\sqrt{3}$$

Comparando estas expressões com (3.5k) verificamos imediatamente que o método numérico é $\sqrt{3}$ vezes mais preciso que o ótico-mecânico nos pontos 1 e 2 e 6 vezes nos demais pontos. Tirada esta importante conclusão, estudemos a precisão com que são determinadas as correções dos parâmetros, considerando um terreno qualquer.

Façamos em (3.1b) e (3.1f), respectivamente,

$$\begin{aligned} z_3K + z_4K + z_5K + z_6K - 2z_1 - 2z_2 &= D \\ -(z_2 + z_4K + z_6K) &= E \\ -(z_4K - z_6K) &= F \\ -(z_1 - z_2 + z_3K - z_4K + z_5K - z_6K) &= G \\ -(z_3K - z_4K + z_5K - z_6K) &= H \end{aligned} \quad (3.5l)$$

e, assim,

$$\begin{aligned} d\alpha' &= (p_3 + p_4 + p_5 + p_6 - 2p_1 - 2p_2)/D \\ d\beta y' &= -(p_2 + p_4 + p_6 + E d\alpha')/3 \\ d\beta z' &= -(p_1 + p_3 + p_5 + F d\alpha')/2k \\ d\gamma' &= -(p_1 + p_3 + p_5 - p_2 - p_4 - p_6 + G d\alpha')/3b \\ d\beta' &= -(p_3 - p_5 + H d\alpha')/2kb \end{aligned} \quad (3.5m)$$

ou, substituindo (3.5m) nas expressões que se lhe seguem,

$$dby' = \left[-\frac{2E}{D} p_1 + \left(1 - \frac{2E}{D}\right) p_2 + \frac{E}{D} p_3 + \left(1 + \frac{E}{D}\right) p_4 + \frac{E}{D} p_5 + \left(1 + \frac{E}{D}\right) p_6 \right] / 3$$

$$dbz' = \left[-\frac{2F}{D} p_1 - \frac{2F}{D} p_2 + \frac{F}{D} p_3 + \left(1 + \frac{F}{D}\right) p_4 + \frac{F}{D} p_5 - \left(1 - \frac{F}{D}\right) p_6 \right] / 2k$$

$$d\gamma' = - \left[\left(1 - \frac{2G}{D}\right) p_1 - \left(1 + \frac{2G}{D}\right) p_2 + \left(1 + \frac{G}{D}\right) p_3 - \left(1 - \frac{G}{D}\right) p_4 + \left(1 + \frac{G}{D}\right) p_5 - \left(1 - \frac{G}{D}\right) p_6 \right] / 3b$$

$$d\beta' = - \left[-\frac{2H}{D} p_1 - \frac{2H}{D} p_2 + \left(1 + \frac{H}{D}\right) p_3 + \frac{H}{D} p_4 - \left(1 - \frac{H}{D}\right) p_5 + \frac{H}{D} p_6 \right] / 2kb$$

Sendo m_0 o erro médio de uma observação de p , se aplicarmos a (3.5m) e às expressões precedentes a lei de propagação de erros, teremos

$$m_{x'}^2 = \frac{12}{D^2} m_0^2 \quad (3.5n)$$

$$m_{by'}^2 = \frac{1}{9} \left(3 + 12 \frac{E^2}{D^2} \right) m_0^2 \quad (3.5o)$$

$$m_{bz'}^2 = \frac{1}{4k^2} \left(2 + 12 \frac{F^2}{D^2} \right) m_0^2 \quad (3.5p)$$

$$m_{\gamma'}^2 = \frac{1}{9b^2} \left(6 + 12 \frac{G^2}{D^2} \right) m_0^2 \quad (3.5q)$$

$$m_{\beta'}^2 = \frac{1}{4k^2b^2} \left(2 + 12 \frac{H^2}{D^2} \right) m_0^2 \quad (3.5r)$$

Estas expressões mostram que a precisão das correções depende, em parte, da conformação do terreno, pois D, E, F, etc., são funções de z_1, z_2, z_3 , etc. Se for possível considerar o terreno plano, termos de (3.5l), $F=G=H=O$ e ainda

$$D = 4z(K - 1)$$

$$E = z(1 + 2K)$$

ou, de acôrdo com (3.1a) e considerando ainda que $k=a/z$

$$D = 4a^2/z$$

$$E = a^2(3z^2/a^2 + 2)/z$$

então,

$$m_{x'}^2 = \frac{3z^2}{4a^4} m_0^2 \quad (3.5s)$$

$$m_{y'}^2 = \frac{9z^4 + 12z^2a^2 + 8a^4}{12a^4} m_0^2 \quad (3.5t)$$

$$m_{bz'}^2 = \frac{z^2}{2a^2} m_0^2 \quad (3.5u)$$

$$m_{\gamma'}^2 = \frac{2}{3b^2} m_0^2 \quad (3.5v)$$

$$m_{\phi'}^2 = \frac{z^2}{2a^2b^2} m_0^2 \quad (3.5w)$$

Estas são as expressões com que podemos calcular os erros médios das correções dos parâmetros, considerando o terreno plano e sendo m_0 o erro médio de uma observação de paralaxe transversal, medida no plano do modelo. Para o estudo da aplicação do método dos mínimos quadrados à compensação das aerotriangulações são estas as expressões usadas, pois, a consideração do relevo do terreno acarretaria consideráveis dificuldades ao desenvolvimento teórico. O profundo estudo de Roelofs é baseado no emprego dessas expressões.

3.6 — Nota sobre o método ótico-mecânico

Conforme vimos no parágrafo 3.2 as simplificações introduzidas no método Jerie, no caso de ser considerado o terreno plano, mostram que a precisão sofre inevitavelmente. Se refletirmos que no método ótico-mecânico o efeito do relevo será fatalmente sentido pelo operador, que não interromperá suas aproximações enquanto não se

satisfazer com a redução das paralaxes, concluimos que mais vale esta técnica do que considerar, a priori, o terreno plano. Mas, como pudemos demonstrar, a orientação calculada conduz a valores mais exatos que o método ótico-mecânico; então, se desejamos resultados de alta precisão, como no caso da aerotriangulação, a solução mais conveniente será o emprego do método de Jerie sem qualquer simplificação, a menos que o terreno se apresente com relevo indiscutivelmente modesto. Devemos, porém, reconhecer que o método é um tanto longo para aplicação sistemática e, assim, acreditamos que os métodos gráficos, que abordaremos a seguir, atendem melhor a todos os casos.

CAPÍTULO IV

MÉTODO DE POIVILLIERS

4.1 — Fundamento teórico

O método de orientação de Poivilliers vem sendo usado com sucesso no "Institut Geographique National" da França desde 1941. Em 1952 o mesmo autor idealizou uma simplificação particularmente interessante no caso da orientação semi-calculada de fotogramas verticais. A introdução do parâmetro α é, como sabemos, a mais ingrata no método de orientação ótico-mecânico, dada a dificuldade de aplicar com precisão a supercorreção; esse inconveniente é totalmente eliminado no método semicalculado de Poivilliers. A simplificação apresentada pelo autor do método em 1952 é hoje usada correntemente também no "Institut Géographique Militaire" da Bélgica.

Vejamos agora os fundamentos do método. Considerando em primeiro lugar a aeropoligonação, escrevemos (2.1j) sob a forma

$$p = db\gamma' + (x-b)d\gamma' + \frac{y}{z}[dbz' + (x-b)d\beta'] + z(1 + y^2/z^2)dz' \quad (4.1a)$$

Fazendo

$$db\gamma' + (x-b)d\gamma' = m \quad (4.1b)$$

$$dbz' + (x-b)d\beta' = n \quad (4.1c)$$

resultará

$$p = m + \frac{y}{z}n + z(1 + y^2/z^2)dz' \quad (4.1d)$$

Sendo $db\gamma'$, dbz' , $d\gamma'$ e $d\beta'$ correções dos parâmetros de orientação, as expressões (4.1b) e (4.1c) mostram, respectivamente, que m e n são constantes para qualquer plano $x=\text{const.}$ Assim sendo, se observarmos os valores de p em três pontos quaisquer do referido plano, teremos três equações análogas a (4.1d) formando um sistema cuja solução fornece dz' e os valores de m e n para o plano. As expressões (4.1b) e (4.1c) mostram ainda que m representa um deslocamento do projetor segundo o eixo dos y e n um deslocamento segundo o eixo dos z , ou sejam uma translação horizontal e outra vertical, respectivamente.

Suponhamos agora que m e n tenham sido determinados para dois planos $x=c$ e $x=e$. Então, de (4.1b) teremos

$$\begin{cases} dby' + (c-b)d\gamma' = m_c \\ dby' + (e-b)d\gamma' = m_e \end{cases}$$

e, de (4.1c)

$$\begin{cases} dbz' + (c-b)d\beta' = n_c \\ dbz' + (e-b)d\beta' = n_e \end{cases}$$

Resolvendo êsses dois sistemas, obtemos

$$dby' = \frac{b-c}{e-c} m_e - \frac{b-e}{e-c} m_c \quad (4.1e)$$

$$dbz' = \frac{b-c}{e-c} n_e - \frac{b-e}{e-c} n_c \quad (4.1f)$$

$$d\gamma' = \frac{m_e - m_c}{e - c} \quad (4.1g)$$

$$d\beta' = \frac{n_e - n_c}{e - c} \quad (4.1h)$$

Estas são as fórmulas gerais para o caso da aeropoligonação, sendo m e n determinados para dois planos diferentes quaisquer. Sendo possível operar nos planos $x=0$ e $x=b$, basta que substituamos nas fórmulas (4.1e) a (4.1h) c por 0 e e por b . Teremos assim

$$dby' = m_b \quad (4.1i)$$

$$dbz' = n_b \quad (4.1j)$$

$$d\gamma' = (m_b - m_0)/b \quad (4.1k)$$

$$d\beta' = (n_b - n_0)/b \quad (4.1m)$$

Considerando agora os casos do aeronivelamento e do aerocaminhamento, escrevamos (2.1k) com o seguinte aspecto:

$$p = dby' + (x-b)d\gamma' + \frac{y}{z}[(x-b)d\beta' - x d\beta] + z(1 + y^2/z^2)d\alpha' \quad (4.1n)$$

Teremos aqui

$$dby' + (x-b)d\gamma' = m \quad (4.1o)$$

$$-x d\beta + (x-b)d\beta' = n \quad (4.1p)$$

Estas expressões nos mostram que tanto dby' como $d\gamma'$ serão dados por fórmulas análogas a (4.1e) e (4.1g), respectivamente, que resolvem o caso geral, ou a (4.1i) e (4.1k) quando se opera nos planos $x=0$ e $x=b$. Resta-nos, pois, obter as expressões que fornecem $d\beta$ e $d\beta'$.

Sendo $x=c$ e $x=e$ os planos escolhidos, a expressão (4.1p) permite-nos organizar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -c \, d\beta + (c-b)d\beta' = n_c \\ -e \, d\beta + (e-b)d\beta' = n_e \end{cases}$$

cujas solução fornece

$$d\beta' = \frac{c \, n_e - e \, n_c}{b(e-c)} \quad (4.1q)$$

$$d\beta = \frac{(c-b)n_e - (e-b)n_c}{b(e-c)} \quad (4.1r)$$

ou, sendo possível operar nos planos $x=0$ e $x=b$, ($c=0$ e $e=b$) teremos

$$d\beta' = -n_0/b \quad (4.1s)$$

$$d\beta = -n_b/b \quad (4.1t)$$

Examinando tôdas as expressões que fornecem as correções para os parâmetros, verificamos que nada têm de complexas, com exceção do sistema de equações que fornecem m , n e dz' . Se fossemos obrigados a resolvê-lo o método de Poivilliers perderia, evidentemente, todo seu valor prático. Eis porque o próprio autor procurou resolvê-lo gráficamente de maneira muito simples e rápida. A seguir trataremos dessa solução gráfica.

4.2 — Solução gráfica

As expressões (4.1a) e (4.1n) mostram que seus dois primeiros termos são independentes de y , o mesmo acontecendo ao coeficiente de y/z . Então, num plano qualquer $x=\text{const.}$ aqueles termos e êsse coeficiente serão também constantes, o mesmo acontecendo a m e n , conforme pode ser verificado examinando as expressões (4.1b), (4.1c), (4.1o) e (4.1p). Segue-se daí que se dermos ao projetor a orientar uma translação $db_y=m$ serão eliminadas, no plano $x=\text{const.}$ as paralaxes provenientes dos erros em by e γ' . Por outro lado o deslocamento vertical do projetor produz uma paralaxe proporcional a y/z , logo, se dermos ao mesmo projetor uma translação vertical $db_z=n$, serão eliminadas, no plano considerado, tôdas as paralaxes provenientes dos erros em bz' e β' na aeropoligonação e de β e β' no aeronivelamento e no aerocaminhamento.

A interpretação geométrica das translações m , segundo Oy e n , segundo Oz , conduzirá à solução gráfica encontrada por Poivilliers.

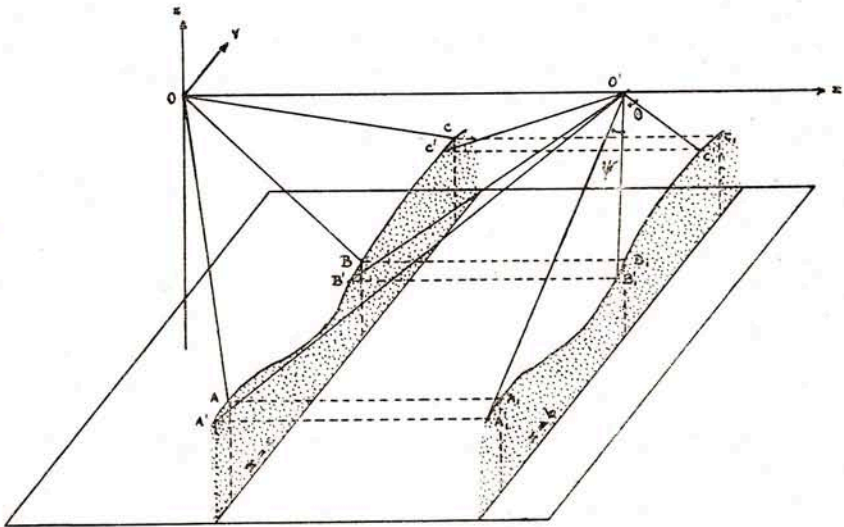


FIG. 4.1

Examinando a Fig. 4.1 verificamos que se O' é o centro de projeção da câmara a orientar, a seção do modelo estereoscópico no plano $x=c$ conterá as paralaxes AA' , BB' e CC' a serem eliminadas. É claro que as projeções ortogonais dessas paralaxes sôbre o plano $x=b$ realizar-se-ão em verdadeira grandeza e $A'A_1O'$, $B'B_1O'$ e $C'C_1O'$ serão três planos que se interceptam em OO' , sendo os ângulos ψ e θ constantes e independentes da posição de O' . Assim sendo, a posição de O' , correspondente aos deslocamentos m e n , será a determinada pela interseção a ré onde os ângulos que a definem são ψ e θ e os pontos fixos serão A_1 , B_1 e C_1 , cujas coordenadas y e z são as mesmas que as de A , B e C . Segue-se daí que, tal como na solução mecânica do problema de Pothenot, por meio do estaciôgrafo, se o centro O' for colocado na posição correta, bastará um giro $d\alpha'$ do feixe luminoso em tórno de $O'x$ para que os pontos A'_1 , B'_1 e C'_1 fiquem em coincidência com A_1 , B_1 e C_1 e isto importará, logicamente, no cruzamento dos raios luminosos em A , B e C . Não será difícil compreender agora a solução gráfica que passaremos a expor.

Para maior clareza reproduzamos os detalhes do plano $x=b$ da Fig. 4.1 (Fig. 4.2). Suponhamos que para eliminar a paralaxe em A tenhamos de deslocar a câmara de O' para O'_1 . Como $O'A'_1$ está solidário com a câmara, a translação desta não alterará sua direção no espaço, logo O'_1A_1 define exatamente o traço do plano perpen-

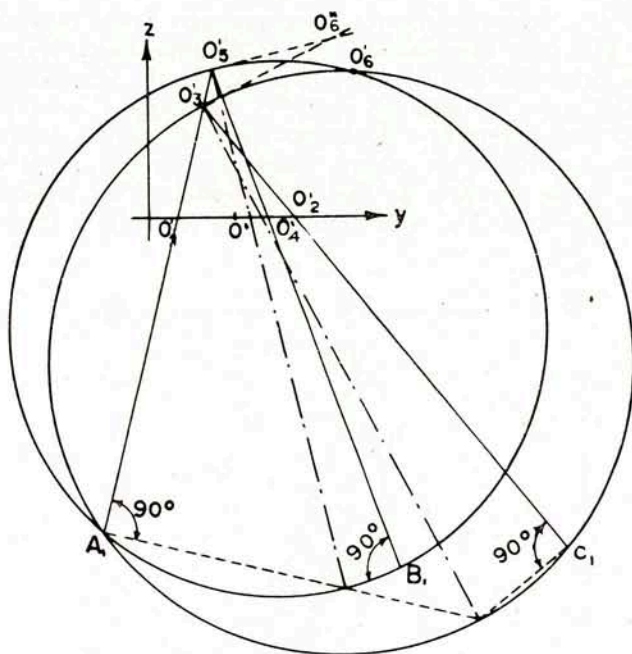


Fig. 4.2

dicular a $x=b$ que contém o raio luminoso. Se para eliminar a paralaxe em C levarmos o centro de projeção para O'_2 , a direção O'_2C_1 será o traço do plano perpendicular a $x=b$ que contém o raio luminoso de C. Ora, sendo O'_3 a interseção de O'_1A_1 com O'_2C_1 essa interseção será a nova posição do projetor onde são eliminadas simultaneamente as paralaxes em A e C. Então os pontos A_1 , O'_3 e C_1 determinarão uma circunferência definindo o segmento capaz do ângulo $\psi + \theta$. Exatamente da mesma forma, O'_5 , interseção de O'_1A_1 com O'_4B_1 será a posição do projetor onde são eliminadas simultaneamente as paralaxes em A e B. Os pontos A_1 , O'_5 e B_1 determinarão a circunferência que define o segmento capaz do ângulo ψ . Se dermos agora uma translação ao projetor para colocá-lo na interseção O'_6 das duas circunferências te-lo-emos situado na posição que atende aos segmentos capazes dos ângulos ψ e $\psi + \theta$ simultaneamente; logo, uma vez levado o projetor a esse ponto, uma simples rotação $d\alpha'$ em torno de Ox , permitirá anular simultaneamente as paralaxes em A, B e C e em todos os demais pontos do plano escolhido.

Como na prática as paralaxes são sempre pequenas, é possível substituir os arcos de circunferência $O'_3O'_6$ e $O'_5O'_6$ pelas tangentes

em O'_3 e O'_5 , respectivamente; o cruzamento dessas tangentes dar-se-á em O'_6 , cujo afastamento de O'_6 é desprezível. Este artifício possibilita fazer um gráfico dos pontos A, B e C, situando-os pelas coordenadas y e z medidas no aparelho e unindo-os aos pontos O'_1 , O'_4 e O'_2 , respectivamente, determinados pelos valores das paralaxes medidas no aparelho, na mesma escala que y e z e, em seguida, ampliar a parte superior da figura multiplicando as paralaxes por um fator apreciável (Fig. 4.3). Feito isto, as paralelas a O'_1A_1 , O'_4B_1

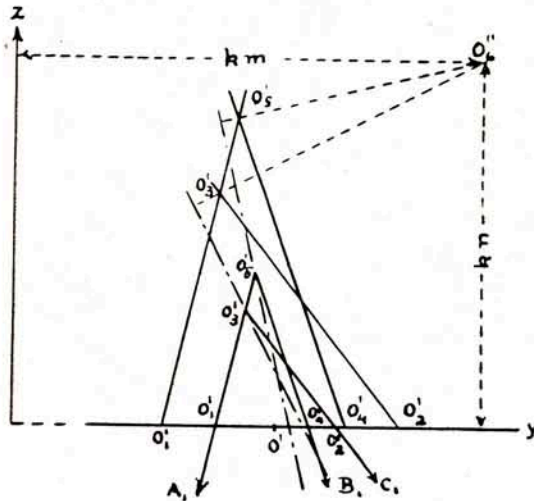


FIG. 4.3

e O'_2C_1 determinarão O'_3 e O'_5 no gráfico ampliado e por esses pontos serão tiradas perpendiculares aos diâmetros das duas circunferências, obtidos pelo método usual de determinação gráfica de segmentos capazes, claramente observado na Fig. 4.2. A interseção dessas tangentes fornecerá O'_6 , cujas coordenadas são km e kn , sendo k o coeficiente pelo qual foram multiplicadas as abcissas de O'_1 , O'_2 , etc.

Esclareçamos agora que para maior clareza nas figuras utilizamos na exposição os ângulos ψ e $\psi + \theta$, mas chegaríamos à mesma solução usando os ângulos ψ e θ , o que é particularmente conveniente quando um dos pontos escolhidos fica situado sobre a base. Vejamos então qual o caminho a seguir quando isto acontece, abordando desde logo o exemplo prático resolvido no capítulo anterior pelo método de Jerie. Nesse exemplo os pontos 1 e 2 estão sobre a base e os planos escolhidos são $x=0$ e $x=b$ de modo que as fórmulas a empregar para o cálculo das correções serão as (4.1i) a (4.1m), restando a determinação de dz' da qual trataremos depois de descrito o traçado do gráfico.

Para operação no plano $x=0$ tomaremos como origem dos valores *ampliados* de by (Fig. 4.4) o ponto sobre Oy correspondente à leitura 98,5 e para origem dos *não ampliados* o ponto sobre Oy que corresponde à leitura $by = 99,33$, relativa ao ponto 1. Usando, então, uma escala de $1\text{ mm} = 0,02$ marcamos sobre Oy os valores de by correspondentes aos pontos 1, 3 e 5. Tomando agora o ponto de Oy onde foi marcado by_1 como origem das coordenadas (y, z) de 1, 3 e 5, situaremos estes pontos sobre o gráfico adotando uma escala que normalmente deverá ser de 1:2. Quando as paralaxes são apreciáveis, o que não acontece no presente caso, deverão ser marcados sobre Oy, a partir de by_1 e na mesma escala das coordenadas, os valores de by_3-by_1 e by_5-by_1 que serão ligados, respectivamente, aos pontos 3 e 5, da mesma forma que by_1 o será ao ponto 1 situado sobre a base. As retas tiradas por 3 e 5 cruzarão O1 em pontos que definirão os ângulos ψ e θ que aqui, devido à pequenês das paralaxes, têm o vértice comum O. Esses cruzamentos vão aparecer ampliados e dissociados tirando pelos pontos marcados com os valores ampliados de by sobre Oy paralelas a O3 e O5, respectivamente. Tirando agora perpendiculares por 1, 3 e 5, respectivamente a O1, O3 e O5, teremos os pontos 3' e 5' definidos por suas interseções e as retas O3' e O5' serão os diâmetros das circunferências correspondentes aos segmentos capazes de ψ e θ , respectivamente. Traçando, então, O₁O' perpendicular a O3' e O₂O' a O5', o ponto O', interseção das duas perpendiculares, terá as coordenadas m_0 e n_0 que procuramos.

Operando de maneira análoga no plano $x=b$, obteremos m_b e n_b e as fórmulas (4.1i) a (4.1m) permitirão calcular os parâmetros. Teremos assim

$$\begin{aligned} d\gamma' &= -d\kappa = 6366(0,91-1,24)/120 = -17,5 \\ d\beta' &= -d\varphi = 6366(0,22-0,69)/120 = -24,9 \\ dby' &= 0,91 \\ dbz' &= -0,22 \end{aligned}$$

A leitura by será calculada somando algèbricamente dby' , o que fornece 0,24.

Resta agora mostrar como calcular dz' . Da expressão (4.1d) tiramos

$$dz' = \frac{p - m - yn/z}{z(1 + y^2/z^2)} \quad (4.2a)$$

que mostra ser o cálculo de dz' demasiado enfadonho. Em vista disso podemos escolher duas alternativas: ou introduzirmos no apa-

relho todos os outros parâmetros calculados e eliminamos a paralaxe restante introduzindo $d\alpha'$ ou, caso existam pontos observáveis ao longo da base, calculamos $d\alpha'$ fazendo em (4.2a) $y=0$, do que resulta:

$$d\alpha' = (p - m)/z \quad (4.2b)$$

Se houvermos operado nos planos $x=0$ e $x=b$, teremos para os pontos 1 e 2 do modelo

$$d\alpha' = (p_1 - m_0)/z_1 = (p_2 - m_b)/z_2$$

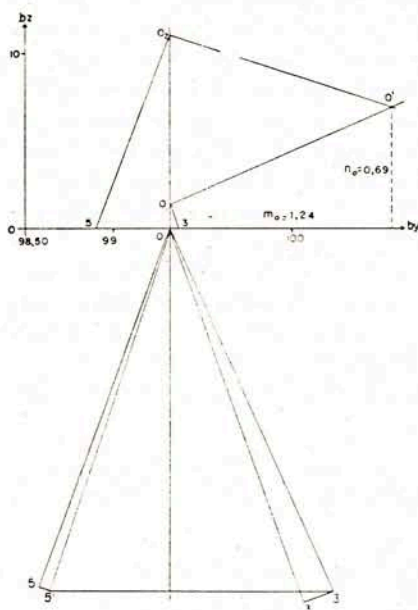


Fig. 4.4

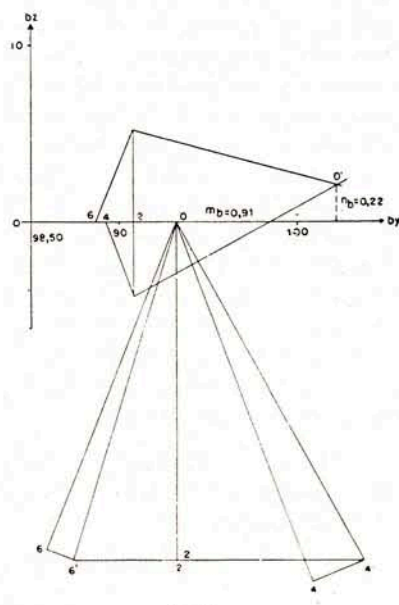


Fig. 4.5

tomando como referência o ponto 1, teremos $p_1=0$ e $p_2=by_2-by_1 = -0,24$, então, aplicando a fórmula (4.2b) resultará:

$$d\alpha' = 19^{\circ},4$$

$$d\alpha' = 19^{\circ},3$$

Resta esclarecer que se as paralaxes forem eliminadas na base (plano $y=0$), as posições O_1 e O_2 (Fig. 4.4) podem ser determinadas diretamente, pois, OO_1 é o deslocamento Δbz necessário à eliminação da paralaxe em 3 e OO_2 o deslocamento análogo que eliminará a paralaxe em 5. Daí concluímos imediatamente a possibilidade de operar diretamente com Δbz em vez de Δby .

Antes de apresentarmos um exemplo prático da construção do gráfico, cabe-nos esclarecer que no caso de fotogramas convergentes e sendo primário o eixo dos y , não será viável introduzir dz sem que apareça, como consequência, uma rotação indesejável $d\gamma$. Assim sendo, será mais prático empregar a construção gráfica descrita no parágrafo precedente.

No exemplo prático que vamos apresentar o plano escolhido para a operação foi o $x=b$, o aparelho empregado foi o Fotoestereógrafo Nistri $\beta/2$, sendo o estereograma constituído por um par de diapositivos da câmara normal $18 \times 18 \text{ cm}^2$, $f = 210 \text{ mm}$. Escolhidos os 3 pontos característicos do plano $x=b$, foram aí eliminadas as paralaxes transversais e obtidas as seguintes leituras:

	by	bz_a	bz_b
Leituras antes da inclinação	29,94	23,63	24,53
Leituras após a inclinação $d\alpha = 30^\circ$	31,16	23,00	25,39

Tomando dois eixos coordenados, um para by e outro para bz e usando uma escala de 50:1, traçaremos sem dificuldade a Fig. 4.7

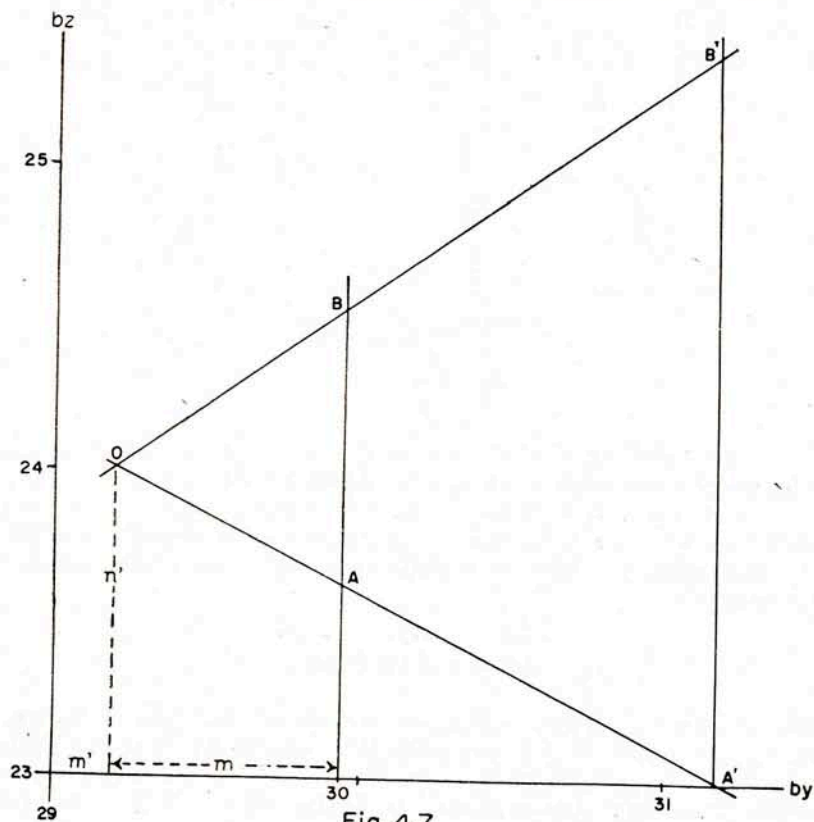


Fig. 4.7

Com a origem adotada para a construção do gráfico as coordenadas de O já são as leituras a serem introduzidas no instrumento, para o projetor que está sendo orientado. De fato, se by_0 for a leitura instrumental depois de orientada a base, poderemos escrever (4.1i) sob a forma

$$by_0 + dby' = m_b + by_0$$

ou

$$by' = m_b$$

e, da mesma forma,

$$bz' = n_b$$

Se traçássemos um outro gráfico para o plano $x=0$, conservando a mesma origem, encontraríamos m_0 e n_0 , sendo fácil verificar que as expressões (4.1k) e (4.1m) continuarão válidas. Para o cálculo de dz' será necessário, no entanto, conhecer m para os dois planos, o que poderá ser tirado diretamente do gráfico, como mostra a Fig. 4.7.

A construção do gráfico para o plano $x=b$ é, porém, suficiente para permitir a orientação completa do modelo, evitando toda e qualquer tentativa. A essa maneira de proceder denominamos orientação semi-calculada. De fato, levado o projetor a orientar à posição definitiva pelas leituras que são as coordenadas do ponto O (Fig. 4.7), a paralaxe em todo o plano $x=b$ poderá ser totalmente eliminada com uma simples rotação dz' ($d\omega'$ para fotogramas verticais) e as paralaxes residuais no plano $x=0$ serão anuladas ótico-mecanicamente.

A orientação semi-calculada aqui descrita é extremamente simples e altamente eficaz. No modelo orientado com o auxílio do gráfico da Fig. 4.7, foram medidos os valores de by nos seis pontos característicos e a maior discrepância em relação à sua média foi de 0,03 mm. Chamamos ainda a atenção para o fato de que embora semi-calculada, a orientação não exige um único cálculo numérico.

CAPÍTULO V

MÉTODO DE KRAMES

5.1 — Bases teóricas

A solução gráfica de Krames é bastante diferente da de Poivilliers na qual o valor de $d\alpha'$ só é determinado com simplicidade se no plano escolhido podemos observar satisfatoriamente um ponto situado nas proximidades da base. De fato, no método de Krames $d\alpha'$ é o primeiro elemento a ser determinado, dependendo dele o conhecimento das demais correções. Apesar dessa diferença aparentemente tão grande, não há a menor dificuldade em passar das fórmulas de Poivilliers às de Krames e cremos mesmo que este é o caminho mais interessante para chegar à solução de Krames.

Se fizermos em (4.1d)

$$m = - N d\alpha' \quad (5.1a)$$

e

$$n = - M d\alpha' \quad (5.1b)$$

poderemos transformar a expressão (4.1d) em

$$p = \left[- N - \frac{y}{z} M + z(1 + y^2/z^2) \right] d\alpha' \quad (5.1c)$$

ou, fazendo

$$- N - \frac{y}{z} M + z + \frac{y^2}{z} = S \quad (5.1d)$$

virá

$$d\alpha' = - \frac{p}{S} \quad (5.1e)$$

Sendo p a paralaxe medida num ponto qualquer do plano $x=c$ e sendo $d\alpha'$ a correção do parâmetro α' , teremos, evidentemente,

$$d\alpha' = - \frac{p_1}{S_1} = - \frac{p_2}{S_2} = - \frac{p_3}{S_3} = \dots \quad (5.1f)$$

Então, conhecidos os valores de S , M , N e dz' obteremos m e n das expressões (5.1a) e (5.1b), respectivamente, sendo as correções para os parâmetros que são dados em função de m e n , calculadas com as mesmas fórmulas deduzidas no capítulo precedente.

Vejamos agora como determinar graficamente S , M e N . Para isso procuremos representar geomêtricamente a expressão (5.1d) posta sob a forma

$$\frac{y}{z} = \frac{N - (z + S)}{y - M} \quad (5.1g)$$

Seja A um ponto qualquer do plano $x=c$, cujas coordenadas observadas no aparelho sejam y e z . Situado o ponto pelas suas coordenadas (Fig. 5.1) tracemos da origem, interseção de Ox com o plano $x=c$, a reta OA e por A tracemos um comprimento igual a S . Pela extremidade de S tracemos uma perpendicular a OA e sôbre esta figuremos o ponto G , de coordenadas M e N . Traçando por G a paralela GD a Oy e prolongando AC até interceptar GD em D , teremos formado o triângulo GCD semelhante a OAB , sendo

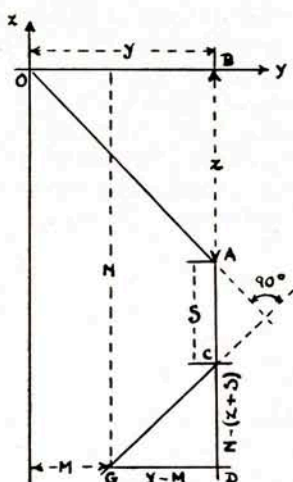


FIG. 5.1

ou,

$$\frac{GD}{AB} = \frac{CD}{OB}$$

$$\frac{y - M}{z} = \frac{N - (z + S)}{y}$$

donde

$$\frac{y}{z} = \frac{N - (z + S)}{y - M}$$

que é a mesma expressão que (5.1g).

Ora, como mostram as expressões (5.1a) e (5.1b), sendo dz' , m e n constantes num plano qualquer $x=c$, M e N também o serão, logo o ponto G satisfará a todos os pontos do modelo ótico situados no referido plano, consequentemente, uma vez determinado G , se tirarmos por G uma perpendicular a OA e prolongarmos BA até interceptar essa perpendicular em C , o segmento AC será o valor de S para o ponto A . O mesmo poderá ser repetido para qualquer outro ponto do mesmo plano.

Vejamos agora como determinar G. Escolhamos três pontos do

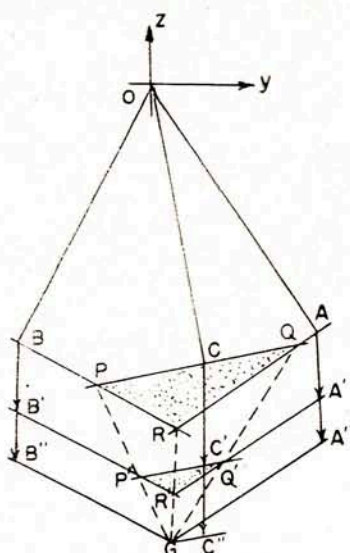


Fig. 5.2

plano $x=c$ e coloquemo-los num gráfico mediante suas coordenadas (y, z) . Por A, B e C tracemos os segmentos AA' , BB' e CC' , paralelos a Oz e proporcionais às paralaxes transversais medidas nesses pontos. Tiremos por A, B e C as perpendiculares a OA, OB e OC, respectivamente, para formar o triângulo PQR e por A' , B' e C' tracemos outras perpendiculares que formarão o triângulo $P'Q'R'$ semelhante ao primeiro. Ligando os vértices homólogos determinaremos o centro de semelhança G. Tirando por G paralelas aos lados dos triângulos e prolongando AA' , BB' e CC' determinaremos A'' , B'' e C'' que vão definir segmentos que, como mostra a figura, atendem à relação

$$\frac{BB'}{BB''} = \frac{PP'}{PG} = \frac{CC'}{CC''} = \frac{QQ'}{QG} = \frac{AA'}{AA''}$$

e, como BB' , CC' e AA' são as paralaxes transversais na escala escolhida, BB'' , CC'' e AA'' serão os valores de S para os pontos selecionados, na mesma escala em que y e z estão representadas. Então, substituindo acima estes equivalentes reduzidos à escala natural, teremos

$$dz' = - \frac{p_a}{S_a} = - \frac{p_b}{S_b} = - \frac{p_c}{S_c}$$

sendo o sinal negativo decorrente da própria fórmula (5.1f) que, por sua vez, decorre da convenção adotada em (5.1d).

Do exposto verificamos que a descrição do traçado efetuado é a própria rotina para construção do gráfico, cuja aplicação prática faremos a seguir, resolvendo o mesmo exemplo utilizado nos dois capítulos anteriores. Antes, porém, devemos esclarecer que, como mostram as relações (5.1h), sendo as paralaxes multiplicadas por um fator qualquer, o que importa em alterar sua escala de representação, apenas será alterado o valor das relações, uma vez que os segmentos que representam S não se alteram e ficam sempre representados na mesma escala das coordenadas y e z . Nas figs. 5.3 e 5.4 en-

contramos, respectivamente os traçados para os planos $x=0$ e $x=b$. As figuras estão bastante reduzidas, pois, normalmente, as paralaxes

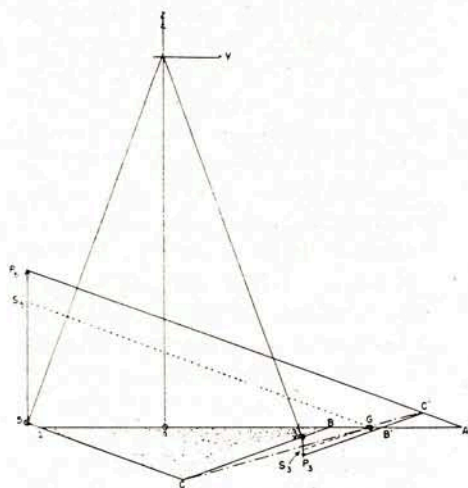


Fig 5.3

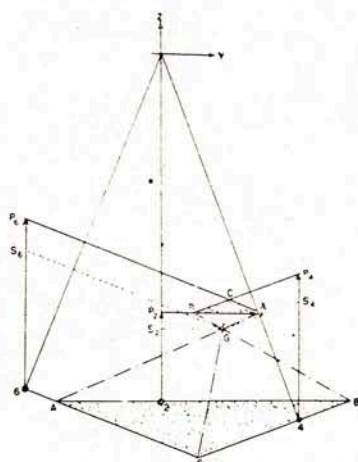


Fig 5.4

xes deverão ser representadas com uma escala de $1 \text{ mm} = 0,01$ e as coordenadas em escala de 1:2.

Esclareçamos agora que as paralaxes levadas aos gráficos foram obtidas subtraindo do valor médio de by_1 (v. exemplo prático do parágrafo 3.1) os demais valores de by e, para maior facilidade da construção gráfica, dirigindo para cima os segmentos correspondentes às paralaxes negativas, convenção inteiramente indiferente aos resultados, desde que se use a mesma para atribuir os sinais a S. Os cinco valores de p e S introduzidos em (5.1f) deveriam fornecer o mesmo valor de dz' , o que não acontece devido aos erros acidentais; assim, obteremos 5 valores diferentes de dz' cuja média fornece

$$dz' = -0,00303 \text{ rad.} = -19,3$$

Tiramos ainda dos gráficos

$$\begin{array}{ll} M_0 = 222 & N_0 = 409 \\ M_b = 72 & N_b = 300 \end{array}$$

e, de acôrdo com (5.1a) e (5.1b) obtemos

$$\begin{array}{ll} n_0 = 0,674 & m_0 = 1,240 \\ n_b = 0,218 & m_b = 0,910 \end{array}$$

Aplicando agora as fórmulas (4.1i) a (4.1m), teremos

$$\begin{array}{ll} dby' = 0,91 & d\gamma' = -17,5 \\ dbz' = 0,22 & b\beta' = -24,3 \end{array}$$

onde os valores angulares foram expressos em minutos centesimais, como resultado do produto por 6366°.

Comparando os valores aqui encontrados com os fornecidos pelo método numérico de Jerie (3.1), verificamos uma excelente concordância. Cabe-nos porém esclarecer que lá levamos antecipadamente em conta os sinais dos parâmetros no autógrafo Wild A7, ao passo que aqui será necessário recordar que

$$\begin{aligned}dbz' &= - dbz' \\d\alpha' &= - d\omega' \\d\beta' &= - d\varphi' \\d\gamma' &= - d\kappa'\end{aligned}$$

Além disso no método de Jerie é possível determinar diretamente o valor de by' , o que aqui não acontece, tornando-se necessário, para obter a leitura by somar ao valor de by_1 a correção encontrada, o que nos fornece 0,24, que foi o valor lá determinado.

5.2 — Confronto com o método de Poivilliers

Comparando os resultados aqui encontrados com os obtidos no capítulo anterior, verificamos que, praticamente, os dois métodos se equivalem no que diz respeito à precisão. Há porém uma diferença sensível na dificuldade com que se apresentam as construções gráficas. No método de Poivilliers, particularmente na sua variante em que os arcos dos segmentos capazes são substituídos pelas cordas, a simplicidade da construção gráfica é, sem dúvida, maior que no método de Krames. Este invoca, porém, em seu favor a ausência de aproximações e a abolição, no traçado, de tôdas as quantidades pequenas. No entanto, a própria comparação dos resultados aqui obtidos mostra que as aproximações feitas por Poivilliers são perfeitamente lícitas e, assim, a própria lei do menor esforço nos encaminha para o método de Poivilliers.

É necessário não perder de vista que consideramos os métodos de orientação calculada como um refinamento, destinado a melhorar os trabalhos de aerotriangulação, o que nos leva a recorrer ao seu uso depois que as paralaxes transversais já se acham convenientemente reduzidas por uma aproximação ótico-mecânica e, nesse caso, o método de Poivilliers é perfeitamente satisfatório.

Resta esclarecer que o método de Krames atende a tôdas as modalidades de aplicação do método de Poivilliers, sem qualquer exceção.

CAPÍTULO VI

TÉCNICA INSTRUMENTAL

6.1 — Operações preliminares

A fim de evitar que sejam excedidos, no aparelho, os limites da componente by , torna-se necessário determinar o azimuth aproximado da faixa ou, o que é mais simples, a componente by do primeiro par, levando em conta os limites extremos da graduação correspondente a essa componente. Para isso o mais prático é fazer uma montagem prévia da faixa, usando as cópias e fixando-as com fita gomada.



Fig. 6.1

Feito isto os centros dessas fotos formarão uma poligonal (Fig. 6.1). Colocando sobre as fotos uma folha de papel vegetal traçamos uma reta ligando os centros extremos e duas paralelas a essa reta, passando pelos centros mais afastados. A paralela equidistante destas duas últimas retas definirá o eixo da faixa, correspondente ao valor médio da graduação de by . A distância de cada um dos centros a essa reta, multiplicada pela relação entre as escalas da fotografia e do modelo ótico, será igual ao valor aproximado do que se deverá somar algèbricamente à leitura média de by . Este cálculo bastará ser feito para o primeiro par.

Outra operação prévia que se tem mostrado eficaz no que diz respeito ao aumento de rendimento durante a passagem da faixa no aparelho é a seleção dos pontos a serem usados durante a operação instrumental. O critério para essa seleção pode ser compreendido com facilidade examinando a Fig. 6.2, que mostra claramente a disposição desses pontos.

Finalmente, no caso do aeronivelamento será necessário obter preliminarmente todos os valores de bz fornecidos pelo estatoscópio registrador (Fig. 6.3) e realizar uma compensação prévia daqueles

valores utilizando, como mostraremos mais adiante, o apóio terrestre situado nos pares extremos.

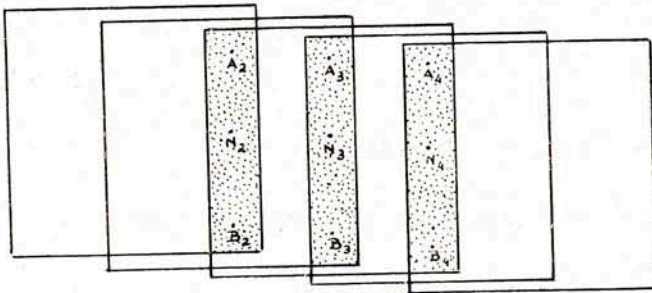


FIG. 6.2

Como não é comum encontrar nos tratados os fundamentos teóricos em que se baseia o instrumento idealizado por Vaisälä, julgamos conveniente apresentá-los, para que se torne mais clara a utilização de seus dados.

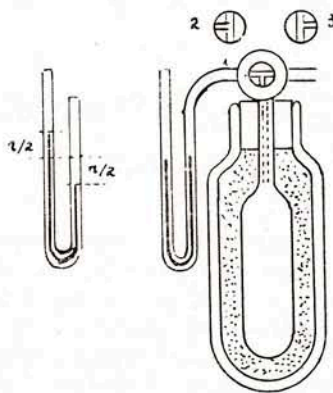


FIG. 6.3

Conforme mostra a Fig. 6.3, que representa o aparelho esquematicamente, consta êste de uma garrafa térmica ligada a um dos extremos de um tubo em U por intermédio de uma válvula de três posições. Na primeira delas ficam em comunicação com a atmosfera o ar do interior da garrafa e ambos os extremos do tubo em U, no interior do qual existe álcool amílico, ficando ao mesmo nível as extremidades dêsse conteúdo líquido. Nessa posição deverá ser conservada a válvula até o avião atingir a altura em que se realizará a fotografia. Nesse instante a válvula deverá ser colocada na posição 2, que põe em comunicação com a garrafa uma das extremidades do tubo em U e elimina a comunicação da garrafa com a atmosfera.

Obviamente se o avião mantiver a altura as duas extremidades das colunas líquidas manter-se-ão à mesma altura, uma vez que a pressão no interior da garrafa não sofre alteração. Se o avião sobe, a pressão externa reduz-se e a pressão interna, superior, fará com que a coluna esquerda do álcool amílico suba de $r/2$ e a da direita desça de $r/2$, para que se restaure o equilíbrio das pressões. Como o ar no interior da garrafa térmica é mantido a 0°C mediante uma mistura de água e gelo, a expansão que se processa para o restabelecimento do equilíbrio opera-se segundo a lei de Mariotte, logo, teremos para o ar do reservatório

$$pv = \text{const.}$$

então, para variações diferenciais,

$$p \, dv + v \, dp = 0$$

donde

$$dp = -\frac{p}{v} \, dv \quad (6.1a)$$

Ora, se $r/2$ é o deslocamento da coluna direita e s a área do tubo capilar, o aumento de volume do ar no reservatório será $sr/2 = dv$, consequentemente (6.1a) transforma-se em

$$dp = -rps/2v \quad (6.1b)$$

A esta diferença de pressão no reservatório corresponderá uma diferença de pressão atmosférica dp' que difere da primeira do peso da coluna líquida r . Então, designando por c o peso específico do álcool amílico teremos para peso da coluna líquida csr , o que nos permite estabelecer a seguinte identidade:

$$dp = dp' + crs$$

ou, como o que nos interessa é a variação da pressão atmosférica,

$$dp' = dp - crs$$

ou, de acôrdo com (6.1b)

$$dp' = -r(ps/2v + cs)$$

donde

$$dp'/p = -r(s/2v + cs/p)$$

ou

$$dp'/p = -r(s/2cv + s/p)c \quad (6.1c)$$

Tendo em vista que o valor exato de c é dado pela aferição do instrumento e considerando que êsse valor pouco se afasta da média, que é 0,80, não haverá prejuízo da precisão se na expressão precedente substituirmos por êsse valor o peso específico que figura no denominador da primeira parcela entre parêntesis. Por outro lado, a

homogeneidade da fórmula exige que p pertença ao mesmo sistema de unidades que r , s e v , logo, se a pressão p for medida em mm da coluna de mercúrio, teremos

$$p = 13,6 \frac{B}{10} \text{ gr/cm}^2$$

e a expressão (6.1c) transformar-se-á em

$$dp'/p = -r(s/1,6v + s/1,36B)c \quad (6.1d)$$

onde s e v são constantes instrumentais. Se o valor de r for dado em mm, teremos finalmente

$$dp'/p = -r(s/0,016v + s/0,0136B)c \quad (6.1e)$$

Ora, a fórmula simplificada do nivelamento barométrico, para pequenas diferenças de nível é, como sabemos,

$$h_2 - h_1 = -8019(1 + 0,0037t) \frac{dp'}{p}$$

logo, substituindo dp'/p pela expressão (6.1e) e fazendo

$$8019s/0,016v = C$$

e

$$8019s/0,0136 = D$$

que são constantes instrumentais, resultará

$$h_2 - h_1 = r(C + D/B) (1 + 0,0037t)c \quad (6.1f)$$

Para o estatoscópio Wild temos

$$C = 0,19$$

$$D = 1180$$

Nesse instrumento uma pequena câmara fotográfica, sincronizada com a câmara aérea, fotografa o tubo em U no mesmo instante em que ocorre a exposição da fotografia aérea.

No estatoscópio Zeiss, onde

$$C = 0,31$$

$$D = 519$$

as colunas líquidas não são fotografadas. Seu movimento acarreta a variação da capacidade de um condensador e, por meio de um circuito elétrico, essa variação de capacidade acarreta uma variação de amperagem indicada por um galvanômetro (Fig. 6.3). É claro que a escala dêste se acha gravada de tal forma que as constantes

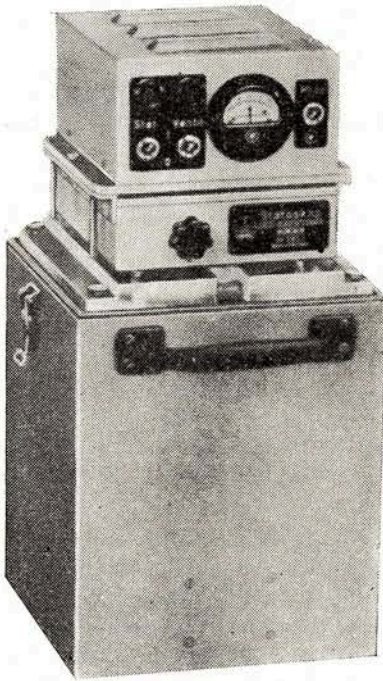


FIG. 6.3-A

instrumentais sejam as que acima fornecemos, para qualquer valor de r lido diretamente no galvanômetro. O sistema tem o mérito indiscutível de permitir colocar repetidores da indicação estatoscópica em qualquer posição. Assim é que o próprio piloto poderá guiar-se pelo repetidor do mesmo instrumento, para manter a cota com grande precisão. Por outro lado a casa Zeiss instalou no interior de suas modernas câmaras outro galvanômetro que é fotografado no mesmo instante da exposição da foto, em cuja margem aparece (Fig. 6.4) a indicação estatoscópica.

A precisão da leitura instrumental pode ser considerada como $\pm 0,5$ da divisão da escala. Para uma altura de 5000 m o erro que daí resulta

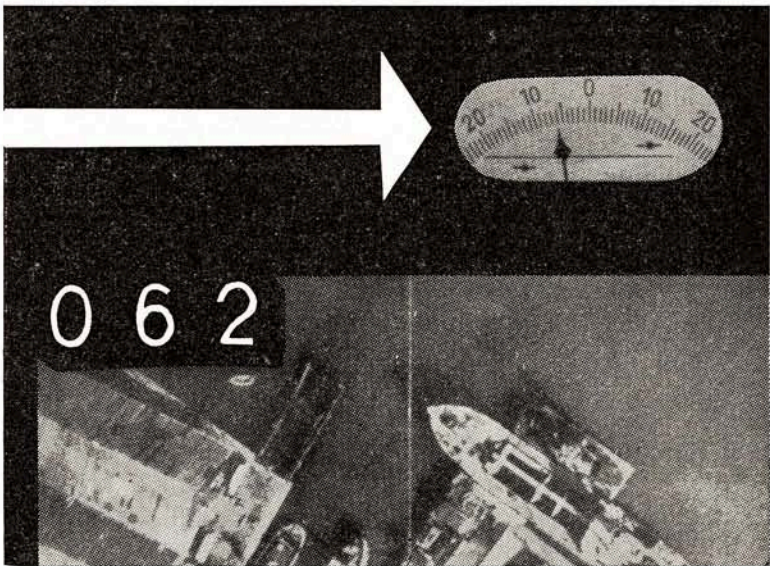


FIG. 6.4

é de $\pm 0,65$ m, mas para que se possa atingir essa precisão a fórmula (6.1f) mostra a necessidade de observar a temperatura t e a pressão barométrica B durante o voo.

A aplicação da expressão (6.1f) pode ser muito facilitada utilizando as tabelas calculadas pela casa Zeiss que fornecem os logaritmos de $(C + D/B)$ em função de B , de $(1 + 0,0037t)$ em função de t e de c . Com a soma desses três logaritmos entra-se numa outra tábua que fornece diretamente o fator pelo qual r deverá ser multiplicado para fornecer a diferença de alturas.

Explicada, como ficou, a utilização dos dados estatoscópicos, é fácil compreender que, antes de passar a faixa no aparelho, deverão ser tirados das fotos todos os elementos necessários ao cálculo das diferenças de alturas e calculá-las. Essas diferenças, é claro, são todas em relação à cota Z_0 , correspondente ao instante em que o reservatório de ar deixou de comunicar-se com o exterior. O valor de Z_0 só poderá ser conhecido com rigor em função dos pontos de apoio existentes no primeiro par da faixa, mas mostraremos mais adiante que o seu conhecimento é dispensável.

Como o piloto procura manter a cota pelas próprias indicações do estatoscópio e como a camada isobárica em que o avião se desloca pode apresentar uma declividade, é fácil compreender que a pressão dentro do reservatório de ar do instrumento passará a corresponder a valores de Z_0 que variam continuamente. Daí decorre um erro sistemático a ser eliminado. Se Z_2 e Z_{i-1} são as cotas da segunda e da penúltima fotos, respectivamente e se ΔZ_2 e ΔZ_{i-1} são as indicações estatoscópicas, devidamente corretas, das mesmas fotos, poderemos escrever

$$Z_2 = Z_0 + \Delta Z_2 \quad (6.1g)$$

$$Z_{i-1} = Z'_0 + \Delta Z_{i-1} \quad (6.1h)$$

A diferença $(Z'_0 - Z_0)$ é o erro sistemático de fechamento do aeronivelamento, que chamaremos de W e que, de acordo com (6.1g) e (6.1h) pode ser expresso por

$$W = Z_{i-1} - Z_2 - \Delta Z_{i-1} + \Delta Z_2 \quad (6.1i)$$

Este erro deverá ser distribuído por $(i-3)$ fotos, uma vez que são excluídas de qualquer correção as duas primeiras e a última fotos. Admitindo que o valor de Z_0 varia linearmente, uma foto qualquer de ordem n receberá a correção

$$(n-2)W/(i-3)$$

donde

$$\begin{aligned} Z_2 &= Z_0 + \Delta Z_2 \\ Z_3 &= Z_0 + \Delta Z_3 + W/(i-3) \\ Z_4 &= Z_0 + \Delta Z_4 + 2W/(i-3) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Tendo em vista que a diferença $(Z_n - Z_{n-1})$ é a componente vertical da base em escala natural, que designaremos por BZ e atribuindo

a BZ um índice em que o primeiro número designa a foto de ré e o segundo a de vante, teremos:

$$\begin{aligned} BZ_{23} &= \Delta Z_3 - \Delta Z_2 + W/(i-3) \\ BZ_{34} &= \Delta Z_4 - \Delta Z_3 + W/(i-3) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (6.1j)$$

Ora, se a escala do modelo for $1/K$ e se exprimirmos por bz_n as leituras correspondentes às componentes verticais das bases, poderemos escrever de maneira geral:

$$bz_n = bz_{n-1} + BZ_{(n-1)n}/K \quad (6.1k)$$

Uma vez que ΔZ representa os dados estatoscópicos, devidamente corretos, as expressões (6.1i) a (6.1k) resolvem o problema, desde que conheçamos Z_2 e Z_{i-1} , o que é viável mediante o apóio altimétrico nos pares extremos. Como no aeromultiplex a distribuição de W é feita mecanicamente no aparelho, conforme mostraremos oportunamente, cuidaremos da determinação de Z_2 e Z_{i-1} nos aparelhos de primeira ordem. Para a obtenção de Z_2 efetuamos a orientação relativa do par 1-2 movimentando ambas as câmaras e conservando $by = bz = 0$. Em seguida realizamos a orientação absoluta, utilizando os pontos de apóio no terreno, introduzindo bz na câmara 1 e as inclinações longitudinais φ_1 e φ_2 , em cada uma das câmaras. Assim

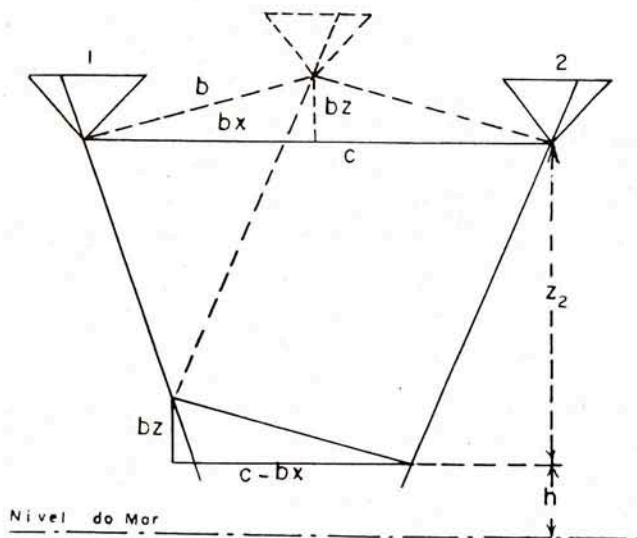


Fig. 6.5

procedendo, o paralelogramo de Zeiss reduz-se ao esquema da Fig. 6.5. A leitura da escala Z do aparelho correspondente à colimação

de um ponto altimétrico qualquer, fornecerá, *na escala do modelo*, a cota da câmara 2 acima do ponto colimado. Sendo h a cota verdadeira do ponto, acima de um plano de referência que, normalmente, é o nível do mar, a cota verdadeira Z_2 dessa câmara acima desse plano será

$$Z_2 = h + Kz \quad (6.1m)$$

Havendo vários pontos poderá ser obtida uma média dos valores de Z_2 que, assim, será dado com muita precisão.

Para a determinação de Z_{i-1} basta chamar atenção para o fato de que o nivelamento longitudinal do modelo será efetuada introduzindo bz na última foto. As demais operações são rigorosamente idênticas.

A fim de disciplinar tôdas as operações, sugerimos o emprego do modelo de cálculo que se segue

Pontos	Par 1-2		Pontos	Par (i-1)i	
	h	z		h	z
Somas			Somas		

$$\begin{aligned}
 Z_2 &= (K[z] + [h])/n = \Delta Z_{i-1} = \\
 Z_{i-1} &= (K[z] + [h])/n = \Delta Z_2 = \\
 B &= \quad \quad \quad A = \quad \quad \quad B = \\
 &\quad \quad \quad W = A - B = \quad \quad \quad W/(i-3) =
 \end{aligned}$$

	Das tabelas			Soma	Cálculo de bz_n						
n	f(B)	f(t)	c	lgk	k	r	ΔZ	ZZ'	BZ	BZ/K	bz_n
2											
3											
4											
.											
.											

Neste modelo, lgk é a soma das três primeiras colunas e $\Delta Z = kr$ já são as diferenças de altura para a cota inicial Z_0 . A coluna BZ' é a componente BZ sem a correção $W/(i-3)$. O valor de bz_n da última coluna é dado pela fórmula (6.1k).

Nas operações com o aeromultiplex tôda a parte relativa ao cálculo de W é omitida, o mesmo acontecendo com a coluna BZ.

Para terminar o estudo da utilização dos dados estatoscópicos, chamamos atenção para o fato de que nessas operações preliminares só é possível eliminar o erro de natureza sistemática W . Os erros acidentais só podem ser compensados depois de passada a faixa no aparelho.

6.2 — Emprego do aeromultiplex

Nos modelos clássicos do aeromultiplex não existe coordenatógrafo nem órgãos de leitura dos parâmetros angulares de orientação. O plano de referência para restituição é, nos multiplex Zeiss, uma pedra mármore polida cuidadosamente e aplainada com rigor, enquanto que nos de fabricação Baush and Lomb esse plano é constituído por uma chapa de aço. A mesinha de desenho reproduz diretamente a projeção em verdadeira grandeza. Tais características, às quais acrescentamos a existência de um projetor para cada fotograma, concorrem para simplificar bastante as operações instrumentais.

A aeropoligonação é particularmente indicada para as pequenas faixas (até cerca de 10 projetores), mas pode ser usada em faixas muito mais extensas, desde que a orientação progressiva parta do par central para as extremidades. Esta tem sido a forma corrente de operar com o grande multiplex Zeiss da DHN, cuja barra de 3 m pode receber até 21 projetores. Este modo de operar não é porém o mais indicado para faixas tão extensas, onde o mais conveniente seria empregar o aeronivelamento. Esclarecemos ainda que também é possível usar o aerocaminhamento, aplicando um artifício para obter as inclinações longitudinais dos projetores, indispensáveis, como mostraremos, à compensação da faixa. Quanto ao método de base constante, de Poivilliers, não é possível aplicá-lo eficientemente empregando o aeromultiplex.

Exporemos a seguir as operações necessárias aos três métodos acima enumerados:

A) Aeropoligonação

- a) nivela-se a barra transversal e longitudinalmente;
- b) efetua-se a orientação relativa do par 1-2 e, terminada esta, realiza-se a orientação absoluta de escala, introduzindo o valor correto de b_x , para reproduzir, na escala do modelo, as distâncias entre pares de pontos planimétricos do apóio no terreno;
- c) nivela-se o modelo, sem tocar na barra, isto é, introduzindo b_z no projetor 1 e φ_1 e φ_2 ;
- d) passa-se ao par 2-3, cuja orientação relativa será feita sem tocar no projetor 2;
- e) volta-se ao par 1-2, leva-se a marca estereoscópica a um ponto bem definido próximo ao nadir de 2;
- f) retorna-se ao par 2-3, sem tocar na mesinha de desenho e,

alterando o valor de bz com o movimento longitudinal de 3, obriga-se o ponto escolhido para o transporte a ficar em contato com a marca estereoscópica;

- g) nas proximidades da perpendicular ao eixo da faixa (Fig. 6.2) que passa pelo nadir do projetor 2 escolhem-se os pontos A_2 e B_2 , distantes o mais possível de N_2 e medem-se e anotam-se as leituras altimétricas dos mesmos;
- h) volta-se ao par 1-2 e verificam-se as cotas nos pontos A_2 e B_2 , para verificação do transporte; as discrepâncias, na escala do modelo, não deverão ultrapassar $\pm 0,3$ mm; se tal acontecer deverão ser refeitas as operações de (d) em diante;
- i) procede-se de maneira análoga com os pares restantes, até chegar ao último;
- j) introduz-se sobre a mesa de restituição a folha de desenho com o reticulado e os pontos de apoio, orientando-a com o auxílio desses pontos;
- k) verifica-se a escala comparando a distância instrumental entre os pontos mais afastados com a mesma distância na folha, o que fornecerá um erro de fechamento que designaremos por d . Se a distância instrumental for superior à real, isto significa que o modelo está se formando a uma distância dos projetores superior à desejada. Esta distância será inferior se o modelo instrumental for mais curto que o correto. Designando por z a distância média de projeção, que poderá ser medida entre o eixo principal do cardan do último projetor e a mesinha traçadora ajustada na cota média aproximada do terreno no último par, e por Δz a variação dessa cota correspondente à variação d , poderemos armar a proporção

$$\Delta z/z = d/D \quad (6.2a)$$

donde $\Delta z = zd/D \quad (6.2b)$

Calculado Δz , leva-se a marca estereoscópica a um ponto bem nítido do último par, registra-se a leitura altimétrica e, conforme seja a distância instrumental maior ou menor que a correta, somar-se-á ou subtrair-se-á da leitura altimétrica o valor de Δz calculado por (6.2b); ajusta-se a mesinha traçadora na graduação correspondente à leitura primitiva corrigida de Δz , levando-se em seguida a marca estereoscópica ao ponto onde se fez a primeira leitura. Feito isto ajusta-se a componente bz da base movendo longitudinalmente o último projetor até que a marca estereoscópica fique em contato com o ponto;

- l) refaz-se o transporte em sentido inverso, até voltar ao primeiro par, onde as diferenças locais serão praticamente desprezíveis;

- m) nivela-se o modelo longitudinalmente, mediante os pontos de apóio altimétrico existentes nos extremos da faixa, inclinando a barra longitudinalmente;
- n) traça-se tôda a planimetria;
- o) utilizando os pontos de apóio altimétrico existente nos extremos e no centro da faixa, atenua-se a pequena curvatura que normalmente aparece, efetuando dois nivelamentos independentes: um da esquerda para o centro e outro da direita para o centro;
- p) depois de verificado o nivelamento transversal que, uma vez efetuado no primeiro par praticamente não se altera, traçam-se as curvas de nível para cada uma das metades da faixa, depois de haver deslocado a folha de desenho para corrigir o efeito de translação decorrente do nivelamento longitudinal.

Pela rotina descrita, verificamos que nas faixas curtas a serem restituídas no multiplex, não há necessidade de efetuar qualquer cálculo, exceto o da simplíssima fórmula (6.2b). A orientação progressiva e a restituição seguem-se sem qualquer intervalo. É mister, porém, que a orientação seja efetuada com extremo cuidado, pois, do contrário, poderá acontecer que a faixa apresente uma torção praticamente impossível de eliminar e, convém esclarecer, tal ocorrência não é das mais raras.

Na DHN as escalas normais para o levantamento da costa são da ordem de 1:50.000 e, em vista disso, o apóio planimétrico é reduzido ao mínimo indispensável, o que não prejudica a precisão exigida pela tolerância gráfica. Assim é que, mesmo nas longas faixas,

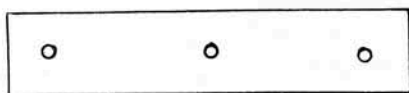


Fig. 6 6

que atingem, por vezes, aos 21 projetores, é costume operar apenas com três pontos planimétricos, sendo um em cada extremo da faixa e o terceiro no par central da mesma (Fig. 6.6). Nesse caso convem iniciar a operação pelo par central, com uma escala aproximada, obtida em função da altura de vôo. Assim procedendo, é compreensível que o erro de escala seja, por vezes, bastante forte, o que exigirá sua redução em duas ou mais vezes, utilizando os pontos situados nos pares extremos. Quando for conseguida a ajustagem em função desses pontos, restará ainda um pequeno erro no ponto do centro da faixa porque, como mostraremos mais adiante, o erro em escala não é linearmente distribuído ao longo da faixa que, além disso, pode apresentar uma ligeira curvatura no plano horizontal. No caso do multiplex, porém, bastará eliminar o erro de escala realizando um ajuste para o lado direito e

outro para o esquerdo e distribuindo o êrro de curvatura pelos três pontos, o que será efetuado por uma simples translação da folha de desenho.

Ajustada a escala, poderá ser executada a restituição planimétrica da faixa inteira, de tal forma que em cada par sejam escolhidos quatro pontos bem definidos, destinados à amarração da altimetria à planimetria já restituída. Terminada a restituição planimétrica serão efetuadas as leituras altimétricas de um ponto bem definido em cada extremo da faixa e com cotas conhecidas, agindo da mesma forma em relação ao ponto de apóio altimétrico situado no centro da faixa. Será ainda necessário ler, para tôdos os projetores, os valores de x e bz . Tôdas essas operações adicionais destinam-se à ajustagem da altimetria. Conforme mostraremos no próximo capítulo, apresenta-se uma curvatura parabólica no modelo ótico, capaz de produzir erros altimétricos consideráveis. Antecipando as conclusões que tiraremos mais adeante, a fim de não interromper a sequência das operações das grandes faixas no multiplex, suponhamos que a barra tenha sido nivelada longitudinalmente e que, mediante o apóio altimétrico nos extremos e no meio da faixa, tenha sido determinada a flecha do

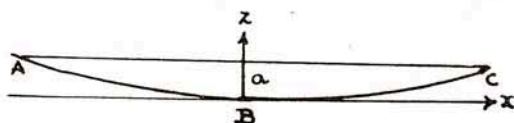


FIG. 6.7

modelo, que vemos na Fig. 6.7. Como a curva ABC é uma parábola com vértice em B, é bastante fácil concluir que, em função da distância AC e da flecha a a parábola estará determinada, o que permitirá calcular a ordenada Δz (V. Cap. VII) para qualquer valor de x . O valor de Δz sob cada projetor pode ser considerado praticamente igual ao valor de Δbz que deve ser a êle atribuído como correção. Então todos os projetores poderão ser levados à sua posição correta e o modelo de cada par poderá ser nivelado longitudinalmente e ajustado sobre os pontos levantados durante a restituição da planimetria, para o traçado da altimetria.

B) Aeronivelamento

Antes de abordarmos a sequência das operações, é necessário esclarecer que algumas delas requerem uma justificação pormenorizada que deixaremos para depois de exposta a rotina. Esta consta das seguintes operações:

- coloca-se sobre a mesa de desenho uma folha em branco;
- nivela-se a barra e ajustam-se os valores de bz ;
- efetua-se a orientação do primeiro par, da mesma forma que na aeropoligonação e marcam-se sobre a folha de desenho os pontos de transporte para o par 2-3, escrevendo-se ao lado dos mesmos as leituras altimétricas;

- d) passa-se ao par 2-3, cuja orientação relativa será efetuada movendo o projetor 3 em by , κ , φ e ω e alterando ligeiramente a inclinação longitudinal φ do projetor 2;
- e) volta-se ao par 1-2 e, deslocando-se o projetor 2 segundo bx , restauram-se as leituras altimétricas dos pontos de transporte;
- f) retorna-se ao par 2-3 e, movendo-se longitudinalmente o projetor 3 ajusta-se a escala obrigando o ponto de transporte nas vizinhanças do nadir de 2 a indicar a mesma cota que se obteve no par 1-2;
- g) verificam-se as leituras nos outros dois pontos de transporte, agindo da mesma maneira que no caso da aeropoligonação;
- h) passa-se ao par 3-4, repetindo-se nele e nos que se lhe seguirem, exatamente as mesmas operações acima descritas, até chegar ao último par;
- i) reorienta-se o primeiro par, movendo em φ e bx o projetor 2 e, mediante os pontos altimétricos existentes neste e no último pares, nivela-se a barra;
- j) coloca-se sobre a mesa a folha definitiva de desenho e verifica-se a diferença entre as distâncias instrumental e da folha, entre os dois pontos de apoio mais distantes da faixa;
- k) calcula-se Δz pela fórmula (6.2b), move-se o penúltimo projetor para ajustar a escala no último par e, obedecendo as normas já descritas, refaz-se a orientação progressiva em sentido contrário, até chegar ao primeiro par, tendo o cuidado de assinalar sobre a folha os pontos de transporte;
- l) restabelecida a orientação do par 1-2, restaura-se novamente a do último, movendo o penúltimo projetor em φ e bx e verificam-se as coincidências dos pontos de apoio;
- m) caso as coincidências forem satisfatórias começa-se a restituição pelo primeiro par;
- n) terminada a restituição do primeiro par passa-se ao par 2-3 e, depois de eliminadas as paralaxes com o movimento de 2 em φ volta-se ao par 1-2, move-se 2 em bx para restaurar as cotas nos pontos de transporte assinalados, retorna-se ao par 2-3, ajusta-se a escala movendo 3 em bx e realiza-se a restituição;
- o) realiza-se a restituição dos demais pares operando exatamente da mesma forma estabelecida em (m) e (n) para os pares 1-2 e 2-3.

É necessário esclarecer que nos multiplex de barra muito extensa existe uma pequena flexão dessa barra, provocada pela carga do grande número de projetores. Essa curvatura, que pode ser considerada uma constante instrumental, desde que trabalhemos sempre com o mesmo número de projetores, mesmo que não os utilizemos todos, influirá diretamente sobre os valores de bx no aparelho. Tal

1.º movimento:

2.º movimento:

3.º movimento:

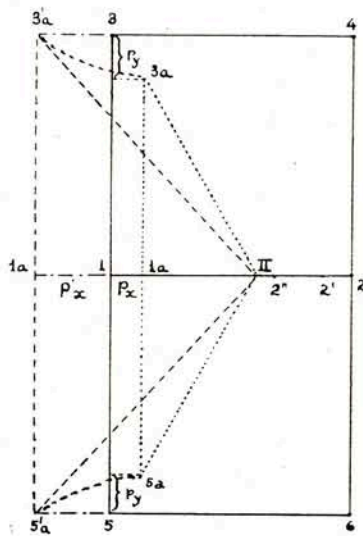
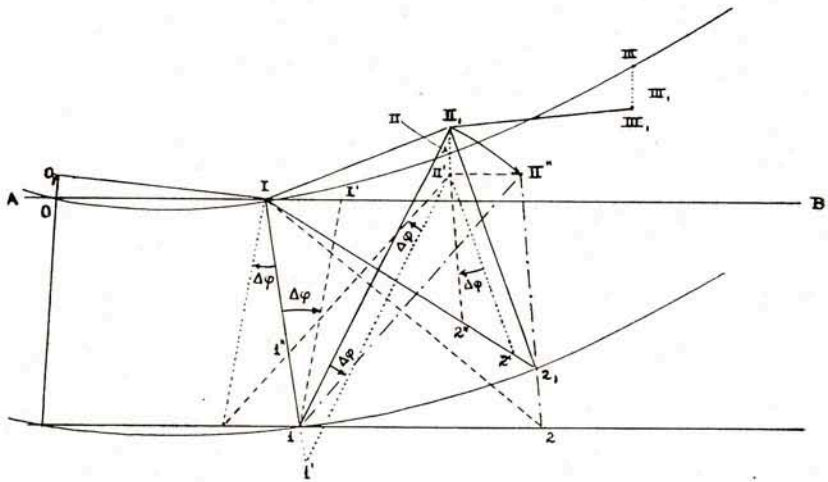


FIG. 6.8

curvatura, que pode ser determinada orientando no aparelho uma série de diapositivos reticulados, sem distorção, e medindo diretamente a flexa, poderá ser descontada dos valores de bz fornecidos pelo estatoscópio. Nessa operação a barra deverá ser nivelada pelos pares extremos e não por meio de nível.

Justifiquemos agora as operações (d), (e) e (f). Conforme vimos na aeropoligonação o modelo é curvo, em forma de parábola. Então, com a barra do multiplex é reta e é em relação a ela que ajustamos os valores de bz dados pelo estatoscópio, obviamente ao realizarmos a orientação relativa sem tocar em bz as paralaxes transversais não poderão ser totalmente anuladas, sem deslocar em φ o projetor de ré. Assim, no aeronivelamento, o problema resume-se em desenvolver sobre um plano, o modelo curvo que apareceria na aeropoligonação. Para que o problema seja bem compreendido, acompanhemos o raciocínio que se segue observando a Fig. 6.8. Aí vemos representada a curva média O, I, II, III das posições dos projetores e a curva do modelo ótico, tal como apareceriam na aeropoligonação. Então os verdadeiros valores de bz , seriam dados pelas distâncias OO_1 , $II\ II_1$, $III\ III_1$, etc. Supondo restituído o modelo inicial (O-I), o que se seguir deverá sofrer uma rotação em torno de um eixo $1Y$, perpendicular ao plano do papel, até os projetores ocuparem as posições I' e II' e 2_1 a posição 2. Como é impraticável realizar simultaneamente todos os movimentos, deveremos efetuarlos por partes. A fim de facilitar a compreensão das várias etapas, acham-se representados na Fig. 6.8 as projeções horizontal e vertical do par (I-II), bem como o efeito particular de cada movimento.

Sendo a distância de II' à reta AB, que representa a barra do multiplex, o valor de bz fornecido pelo estatoscópio, e sendo II_1 a posição que teria o projetor na aeropoligonação, a descida de II_1 para II' acarretará o aparecimento de paralaxes transversais py e horizontais px ; as primeiras com valores iguais em 3 e 5, mas de sentidos contrários, serão eliminadas mediante uma inclinação $\Delta\varphi$ do projetor II' , cujo efeito será o deslocamento de 3a e 5a para 3'a e 5'a, respectivamente, alterando a paralaxe horizontal px para $p'x$, o que deslocará o ponto 1 (projeção horizontal) para $1''$. Refazendo, portanto, o transporte de cota, 1 retomará seu lugar quando o projetor II' for deslocado para II'' , que é sua posição final. Resta, portanto, corrigir a orientação do projetor I. Para isso será necessário dar ao projetor I a rotação $\Delta\varphi$ e a translação I-I'. A primeira será dada anulando as paralaxes sob o projetor II'' e a segunda restaurando as cotas no par O-I, dos pontos de transporte ao par I-II'' por um movimento em bz de I.

C) Aerocaminhamento

Embora o aerocaminhamento não tenha sido, até o presente, usado na operação com o multiplex, não há a menor dificuldade em empregá-lo. Tratando-se de um método em que bz é sempre conser-

vado igual a zero, vemos que sua aplicação evitará o encurvamento do modelo ótico permitindo, tal como no aeronivelamento, operar com muitos projetores e vencer grandes distâncias. No entanto o

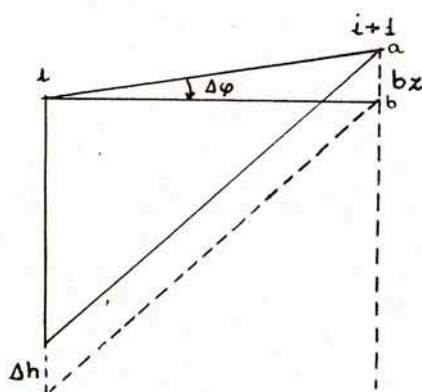


FIG. 6.9

anotando-se o seu valor. Em seguida, leva-se o projetor de vante à posição b ($bz=0$), e torna-se a ler e registrar a cota no ponto nadiral de transporte; a diferença Δh será, como mostra a figura, igual a bz e a mesma figura mostra ainda que $\Delta\phi$, em radianos, será dado por

$$\Delta\phi = bz/bx \quad (6.2c)$$

Nos multiplex Zeiss a simples leitura x na própria barra, para todos os projetores, permitirá deduzir bz .

Pelo exposto, concluímos que o aerocaminhamento exigirá as mesmas operações que o aeronivelamento, e mais uma, como a que acabamos de descrever, incluída entre os itens (c) e (d).

Quanto ao aerocaminhamento a base constante e à utilização de fotogramas convergentes, o multiplex é inteiramente inadequado à execução de tais trabalhos.

Para terminar o que se refere ao multiplex, insistimos no fato de que, como a folha de desenho desempenha o papel de coordenatógrafo, é mister que seja usado papel inextensível, para que não haja dilatações ou contrações capazes de falsear os resultados.

6.3 — Emprego dos aparelhos de primeira ordem

No trabalho com aparelhos de primeira ordem todos os transportes são efetuados com coordenadas lidas no aparelho. Nos instrumentos mais modernos é possível totalizar mecanicamente essas coordenadas. No estereoplanígrafo C/8 foram completamente eliminadas as leituras, pois as coordenadas, já totalizadas, são, mediante um simples movimento de alavanca do operador, impressas numa

aerocaminhamento exige a medição do ângulo $\Delta\phi$ (Fig. 6.9) de que é inclinado o projetor de ré para que o de vante possa sempre ser conservado em $bz=0$. Examinando a Fig. 6.9 verificamos que o referido ângulo pode ser medido indiretamente. De fato o projetor de vante pode ser orientado, preliminarmente como se fosse uma aeropoligonação, o que o levará à posição a . Efetuado o transporte de escala realiza-se a leitura altimétrica no ponto nadiral de transporte,

folha apropriada. Como, porém, tais requintes não se acham ainda vulgarizados em todos os aparelhos, vamos mostrar como se deverá operar nos aparelhos mais comuns.

Em primeiro lugar deve ser elaborada uma folha de registro como a que vemos no quadro 6-I, cujo preenchimento será esclarecido ao correr da explicação dos vários métodos de aerotriangulação que abordaremos a seguir.

A) Aeropoligonação

A aeropoligonação consta das seguintes operações:

- a) orienta-se relativa e absolutamente o par inicial, realizando o nivelamento longitudinal com bz na câmara 1 e φ em ambas as câmaras;
- b) lêem-se e registram-se (quadro 6-I) as coordenadas instrumentais x' , y' e z nos pontos A_2 , N_2 e B_2 (Fig. 6.2) e em todos os pontos de apóio;
- c) lêem-se e registram-se todos os parâmetros de orientação;
- d) inverte-se a base, transporta-se a imagem da câmara de vante para ré (inversão ótica) e substitui-se o fotograma 1 pelo 3;
- e) realiza-se a orientação relativa da câmara 3 sem mover a 2;
- f) transporta-se a escala fazendo variar bx até que seja restaurada a cota lida no par 1-2 no ponto N_2 ;
- g) verificam-se os transportes nos pontos A_2 e B_2 e, se houver praticamente a coincidência com as leituras altimétricas efetuadas no par anterior, registram-se os valores de x' , y' e z para A_2 , N_2 e B_2 e para A_3 , N_3 e B_3 ;
- h) calculam-se (quadro 6-I) os valores de x e y , somando a tôdas as coordenadas as diferenças

$$\begin{array}{rcl} x & - & x' \\ N_{12} & & N_{22} \\ & & \\ y & - & y' \\ N_{12} & & N_{22} \end{array} = D$$

$$= E$$

onde o primeiro índice de N indica o número do par e o segundo o número da foto. Com essa operação as coordenadas planimétricas dos pontos comuns aos dois pares, particularmente A_2 e B_2 , deverão apresentar valores muito próximos aos obtidos no par precedente; se isso não acontecer deverá ser repassada a orientação antes de prosseguir;

- i) passa-se ao par 3-4 e aos demais, procedendo da mesma forma já indicada, até chegar ao último par, onde deverão ser lidas, com todo o cuidado, as coordenadas dos pontos de apóio;
- k) realiza-se a orientação absoluta do último par, com os pontos de apóio aí existentes e leem-se e registram-se as novas coordenadas e os novos parâmetros de orientação.

QUADRO 6-I

	bx	by	bz	K	φ	ω	Valor prec.φ	Δφ
Câmara de RÉ " de VANTE	59,79 60,29	100,00 100,00	00,46 —	101°12'50" 99°56'00"	99°39'50" 99°07'00"	200°28'00" 200°61'00"		
			Pontos	x'	y'	x	y	z
			PFP 26	191,40	82,30	1.914,00	— 823,00	520,00
			PFP 29	218,10	614,61	2.181,00	— 6.146,10	521,35
			PFP 30	385,08	532,33	3.850,80	— 5.323,30	508,89
			PFP 25	513,12	152,73	4.131,20	— 1.527,30	546,45
			N 12	449,20	341,37	4.492,00	— 3.413,70	527,50
			A 12	442,12	563,42	4.421,20	— 5.634,20	515,50
			B 12	446,41	189,93	4.644,10	— 1.899,30	559,00
	bx	by	bz	K	φ	ω	Valor prec.φ	Δφ
Câmara de RÉ " de VANTE	58,86 59,57	100,00 100,52	— —	99°56'00" 99°46'30"	98°95'00" 100°25'00"	200°61'00" 200°03'30"	99°07'00"	—12°00"
			Pontos	x'	y'	x=x'+D	y=y'+E	z
x12 = 4.492,00 x22 = 2.079,50 D = +2.412,50			N 24	207,95	340,70	4.492,00	— 3.413,70	527,50
			A 24	200,76	562,53	4.420,10	— 5.632,00	515,50
			B 24	205,06	189,33	4.463,10	— 1.900,00	559,00
			N 23	434,58	346,64	6.759,30	— 3.473,10	546,30
			A 23	419,07	609,57	6.603,20	— 6.102,40	523,50
y12 = 3.413,70 y22 = 3.407,00 E = 6,70			B 23	432,07	81,59	6.733,20	— 822,60	530,00
			PFRN 50?	267,50	331,06	5.087,50	— 3.317,30	530,00
			Somas	2.167,09	2.461,42	40.983,82	24.661,10	
	bx	by	bz	K	φ	ω	Valor prec.φ	Δφ
Câmara de RÉ " de VANTE	60,47 61,18	100,52 99,28	— —	99°46'30" 100°48'00"	100°07'10" 99°50'50"	200°03'30" 200°21'70"	100°25'00"	—17°90"
			Pontos	x'	y'	x=x'+D	y=y'+E	z
x23 = 6.759,30 x33 = 1.928,40 D = +4.830,90			N 33	192,84	192,84	6.759,30	— 3.473,10	546,30
			A 33	177,10	608,63	6.601,90	— 6.101,60	523,50
			B 33	189,80	80,74	6.728,90	— 822,70	530,00
			N 34	418,35	343,45	9.014,40	— 3.449,80	542,00
			A 34	414,95	610,20	8.980,40	— 6.117,30	555,70
y23 = 3.473,10 y33 = 3.457,80 E = + 15,30			B 34	424,13	80,42	9.072,20	— 819,50	519,50
			PFM 25	298,70	348,73	7.817,90	— 3.502,60	546,30
			Somas	2.115,87	2.417,95	54.975,00	24.286,60	

QUADRO 6-I

	bx	by	bz	K	φ	ω	Valor prec.φ	Δφ
Câmara de RÉ " de VANTE	61,33 62,34	99,28 94,38	— —	100°48'00" 100°87'00"	99°52'00" 100°31'50"	200°21'50" 200°26'70"	99°50'50"	+1°50"
x ₃₄ = 9.014,40 x ₄₄ = 1.738,60 D = +7.275,80 y ₃₄ = 3.449,80 y ₄₄ = 3.430,70 E = + 19,10	Pontos			x'	y'	x = x' + D	y = y' + E	z
	N 44			173,86	343,07	9.014,40	— 3.449,80	542,00
	A 44			170,05	609,84	8.976,30	— 6.117,50	555,70
	B 44			180,15	80,35	9.077,30	— 824,40	521,00
	N 45			439,02	344,89	11.666,00	— 3.468,00	537,00
	A 45			432,34	590,82	11.599,20	— 5.927,30	575,40
	B 45			429,00	125,88	11.565,80	— 1.277,90	540,00
	PFR.N 50R			302,82	387,88	10.304,00	— 3.897,90	547,00
	Somás			2.127,24	2.482,73	72.203,00	24.962,80	
	bx	by	bz	K	φ	ω	Valor prec.φ	Δφ
Câmara de RÉ " de VANTE	61,14 62,36	94,38 92,00	— —	100°87'00" 100°70'00"	100°35'50" 99°53'50"	200°26'80" 199°79'50"	100°31'50"	+2°00"
x ₄₅ = 11.666,00 x ₅₅ = 1.924,10 D = +9.741,90 y ₄₅ = 3.468,00 y ₅₅ = 3.439,80 E = + 28,20	Pontos			x'	y'	x	y	z
	N 55			192,41	343,98	11.666,00	— 3.468,00	537,00
	A 55			185,66	589,82	11.598,50	— 5.926,40	576,50
	B 55			182,35	125,19	11.565,40	— 1.280,10	540,00
	N 54			417,66	345,08	13.918,50	— 3.479,00	536,00
	A 56			411,93	605,70	13.861,20	— 6.085,20	596,70
	B 56			411,73	133,57	13.859,20	— 1.363,90	552,50
	PFR.N 50S			257,39	375,60	12.315,80	— 3.784,20	541,50
	Somás			2.059,13	2.518,94	88.784,60	25.386,80	
	bx	by	bz	K	φ	ω	Valor prec.φ	Δφ
Câmara de RÉ " de VANTE	58,60 59,60	92,00 87,70	— —	100°70'00" 100°79'50"	99°56'00" 100°34'00"	199°79'50" 199°43'50"	99°53'50"	+12°50"
x ₅₆ = 13.918,50 x ₆₆ = 1.728,50 D = +12.190,00 y ₅₆ = 3.479,00 y ₆₆ = 3.443,10 E = + 35,90	Pontos			x'	y'	x = x' + D	y = y' + E	z
	N 66			172,85	344,31	13.918,50	— 3.479,00	536,00
	A 66			167,20	604,83	13.862,00	— 6.084,20	596,70
	B 66			167,00	132,90	13.860,00	— 1.364,90	553,50
	N 67			424,88	342,66	16.438,80	— 3.462,50	530,00
	A 67			428,25	595,10	16.472,50	— 5.986,90	559,50
	B 67			421,68	87,84	16.406,80	— 914,30	556,20
	PFR.N 42E			376,60	452,42	15.956,00	— 4.560,20	557,30
	Umicrama			276,95	373,70	14.959,50	— 3.772,90	600,50
	Somás			2.435,41	2.933,77	121.874,10	29.624,90	

QUADRO 6-I

	bx	by	bz	K	φ	ω	Valor prec. φ	$\Delta\varphi$
Câmara de RÉ " de VANTE	61,10 62,10	87,70 83,49	— —	100°79'50 ^{cc} 99°40'30 ^{cc}	99°39'00 ^{cc} 99°71'00 ^{cc}	199°43'50 ^{cc} 200°18'30 ^{cc}	100°34'00 ^{cc}	—95°00 ^{cc}
			Pontos	x'	y'	x = x' + D	y = y' + E	z
x ₆₇ = 16.438,80			N 77	188,56	342,53	16.438,80	— 3.462,50	530,00
x ₇₇ = 1.885,60			A 77	191,50	595,00	16.468,20	— 5.987,20	559,50
D = 14.553,20			B 77	185,85	87,85	16.411,70	— 915,70	536,20
			N 78	421,50	345,36	18.768,20	— 3.490,80	551,70
y ₆₇ = 3.462,50			A 78	430,98	586,30	18.863,00	— 5.900,20	605,00
y ₇₇ = 3.425,30			B 78	423,45	112,00	18.787,70	— 1.157,20	583,50
E = + 37,20			PFM 4	307,50	538,95	17.628,20	— 5.426,70	625,50
			PFM 2	372,66	172,08	18.279,80	— 1.758,00	610,50
			Somas	2.522,00	2.780,07	141.645,60	28.098,30	
	bx	by	bz	K	φ	ω	Valor prec. φ	$\Delta\varphi$
Câmara de RÉ " de VANTE	61,09 62,21	83,49 81,78	— —	99°40'30 ^{cc} 100°19'30 ^{cc}	100°26'50 ^{cc} 99°74'50 ^{cc}	200°18'30 ^{cc} 199°80'50 ^{cc}	99°71'00 ^{cc}	+55°00 ^{cc}
			Pontos	x'	y'	x = x' + D	y = y' + E	z
x ₇₈ = 18.768,20			N 88	171,90	344,53	18.768,20	— 3.490,80	551,70
x ₈₈ = 1.719,00			A 88	181,43	585,40	18.863,50	— 5.899,50	604,50
D = 17.049,20			B 88	173,90	111,37	18.788,20	— 1.159,20	584,00
			N 89	413,84	342,50	21.187,60	— 3.470,50	551,50
y ₇₈ = 3.490,80			A 89	423,65	599,80	21.285,70	— 6.043,50	601,00
y ₈₈ = 3.445,30			B 89	427,50	98,00	21.324,20	— 1.025,50	620,00
E = + 45,50			PFM 1	330,65	208,62	20.355,70	— 2.131,70	617,80
			Somas	2.122,87	2.290,22	140.573,10	23.220,70	
	bx	by	bz	K	φ	ω	Valor prec. φ	$\Delta\varphi$
Câmara de RÉ " de VANTE	58,94 60,11	81,78 80,60	— —	100°19'30 ^{cc} 101°39'00 ^{cc}	99°60'00 ^{cc} 99°89'30 ^{cc}	199°80'50 ^{cc} 199°33'40 ^{cc}	99°74'50 ^{cc}	—14°50 ^{cc}
			Pontos	x'	y'	x	y	z
x ₈₉ = 21.187,60			N 99	171,80	343,29	21.187,60	— 3.470,50	551,50
x ₉₉ = 1.718,00			A 99	180,95	600,23	21.279,10	— 6.039,90	601,00
D = 19.469,60			B 99	185,52	98,80	21.324,80	— 1.025,60	620,00
			N 910	432,45	359,83	23.794,10	— 3.635,90	579,00
y ₈₉ = 3.470,50			A 910	428,10	570,42	23.750,60	— 5.741,80	624,70
y ₉₉ = 3.432,90			B 910	436,85	96,42	23.838,10	— 1.001,80	616,00
E = + 37,60			Somas	1.835,67	2.068,99	135.174,30	20.915,50	

QUADRO 6-I

	bx	by	bz	χ	φ	ω	Valor prec. φ	$\Delta\varphi$
Câmara de RÉ " de VANTE	60,86 61,86	80,60 78,82	— —	101°39'00" 100°65'00"	99°79'50" 99°91'50"	199°33'40" 199°21'50"	99°89'30"	—9°80"
			Pontos	x'	y'	x = x' + D	y = y' + E	z
x ₉₁₀ = 23.794,10			N 1010	190,20	359,63	23.794,10	— 3.635,90	579,00
x ₁₀₁₀ = 1.902,00			A 1010	185,44	570,16	23.746,50	— 5.741,20	624,70
D = 21.892,10			B 1010	194,85	96,25	23.840,60	— 1.002,10	616,00
			N 1011	414,40	316,00	26.036,10	— 3.199,60	640,50
y ₉₁₀ = 3.635,90			A 1011	415,38	576,54	26.045,90	— 5.805,00	657,00
y ₁₀₁₀ = 3.596,30			B 1011	428,85	117,50	26.180,60	— 1.214,60	700,70
E = + 39,60			PFM 10	246,55	588,55	24.357,40	— 5.925,10	659,00
			Somas	2.075,67	2.624,63	174.001,20	26.523,50	
	bx	by	bz	κ	φ	ω	Valor prec. φ	$\Delta\varphi$
Câmara de RÉ " de VANTE	59,14 60,66	78,82 73,12	— —	100°65'00" 100°65'00"	99°45'50" 99°69'00"	199°21'50" 200°20'50"	99°91'50"	—46°00"
			Pontos	x'	y'	x = x' + D	y = y' + E	z
x ₁₀₁₁ = 26.036,10			N 1111	173,18	315,39	26.036,10	— 3.199,60	640,50
x ₁₁₁₁ = 1.731,80			A 1111	174,07	575,76	26.045,90	— 5.805,00	650,00
D = 24.304,30			B 1111	187,66	117,05	26.180,60	— 1.214,60	700,70
			N 1112	436,36	326,58	28.667,90	— 3.311,50	694,00
y ₁₀₁₁ = 3.199,60			A 1112	433,18	566,42	28.636,10	— 5.709,90	766,50
y ₁₁₁₁ = 3.153,90			B 1112	408,22	87,94	28.386,50	— 925,10	777,50
E = + 45,70			Somas	1.812,67	1.989,14	163.953,10	20.165,70	
	bx	by	bz	κ	φ	ω	Valor prec. φ	$\Delta\varphi$
Câmara de RÉ " de VANTE	59,46 60,78	73,12 69,78	— —	100°65'00" 100°25'50"	99°92'50" 99°25'00"	200°28'50" 200°44'70"	99°69'00"	+23°50"
			Pontos	x'	y'	x = x' + D	y = y' + E	z
x ₁₁₁₂ = 28.667,90			N 1212	191,74	325,76	28.667,90	— 3.311,50	694,00
x ₁₂₁₂ = 1.917,40			A 1212	188,72	565,30	28.637,70	— 5.706,90	766,50
D = 26.750,50			B 1212	163,78	87,29	28.388,30	— 926,80	777,50
			PF 34	211,95	75,30	28.870,00	— 806,90	784,00
			PF 31	237,82	554,04	29.128,70	— 5.594,30	770,30
y ₁₁₁₂ = 3.311,50			PFM 15	343,86	479,28	30.189,10	— 4.846,70	782,00
y ₁₂₁₂ = 3.257,60			PF 33	401,36	511,59	30.764,10	— 5.169,80	772,00
E = + 53,90			PF 35	372,03	90,90	30.470,80	— 962,90	748,50
			Somas	2.111,26	2.689,46	235.116,60	27.325,80	

B) Aeronivelamento e aerocaminhamento

O aeronivelamento e o aerocaminhamento diferem da aeropoligonação por serem os valores de bz preestabelecidos. Então, as operações para sua execução são as mesmas que as indicadas para a aeropoligonação, exceto no que diz respeito ao item (e), pois, para a total eliminação das paralaxes durante a orientação progressiva é mister dar à câmara de ré uma rotação $\Delta\varphi$. Como em cada par os parâmetros de orientação são sempre registrados, essa inclinação será sempre conhecida para posterior utilização.

No que diz respeito ao aerocaminhamento, as inclinações longitudinais dos modelos decorrentes da manutenção de $bz=0$, normalmente não afetam os valores de x .

C) Aerocaminhamento a base constante

Na memória apresentada por Poivilliers à Academia de Ciências de França, em 23 de junho de 1952, o autor do método diz que com a sua aplicação "Os erros sistemáticos são tornados tão constantes quanto possível, mantendo a base fixa em grandeza e direção, segundo o eixo dos x . Os erros provenientes das deformações locais anormais dos feixes perspectivos são eliminadas. As operações são reduzidas a uma única passagem".

De fato vemos que se a base deve ser fixa em *grandeza e direção*, o aparelho trabalhará sempre sem inversão, isto é, sempre com base ou interna ou externa. Daí decorrerá a permanente necessidade de transportar *materialmente* a foto de vante para ré e colocar no porta-foto de vante o novo fotograma, a fim de realizar a concatenação. Ora, como isso importa em que as projeções se realizem sempre pelas mesmas regiões das objetivas das câmaras de projeção do aparelho, está garantida a manutenção da constância dos erros sistemáticos. Mas, para que seja possível realizar a orientação progressiva, será mister transportar todos os parâmetros de orientação externa da câmara que antes se encontrava a vante, para a câmara de ré, o que exige uma retificação rigorosíssima do instrumento ou, então, um acessório especial, constituído por níveis adequados, que permitam a transposição dos parâmetros com o necessário rigor. É claro que o recurso dos níveis só é possível nos aparelhos cujas câmaras tenham eixos óticos verticais.

Por outro lado verificamos que o método é perfeitamente aplicável empregando aparelhos de segunda ordem, uma vez que dispensa inversão ótica.

Como as condições a que deve preecher a base são expressas por

$$\begin{aligned}bx &= \text{constante} \\by &= bz = 0\end{aligned}$$

vamos mostrar como poderá ser realizada a orientação progressiva. Uma vez que $b_x = \text{constante}$, não haverá transporte de escala de

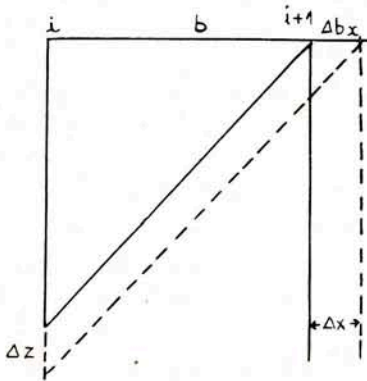


Fig. 6.10

um par ao seguinte e isso acarretará num par qualquer ($i, i+1$), um erro Δx nos pontos de transporte (Fig. 6.10) situados sob a câmara ($i+1$). Como mostra a figura o erro é igual a Δb_x e, assim,

$$\Delta x / \Delta z = b / z$$

donde

$$\Delta x = \Delta z \, b / z \quad (6.3a)$$

É claro que Δz é a diferença entre as leituras altimétricas no ponto de transporte, realizadas nos pares $[(i-1), i]$ e $[i, (i+1)]$. Trata-se, pois, de uma correção

muito simples e que pode ser rapidamente calculada pela expressão (6.3a).

Agora vejamos como proceder para estabelecer as correções de azimute, decorrentes do fato de ser mantido $b_y = 0$. Examinando a Fig. 6.11 vemos que se não for introduzido b_y e se conhecemos o azimute A do primeiro par da faixa, será necessário determinar, como numa poligonal, as deflexões θ , para podermos calcular o azimute de um par em função do azimute do precedente, usando a expressão geral

$$A_{i,i+1} = A_{i-1,i} + \theta_{i,i+1} \quad (6.3b)$$

Sendo o transporte de um par ao seguinte, no que diz respeito à planimetria, realizado somando às coordenadas instrumentais x' e y' as diferenças D e E (v. aeropoligonação), a manutenção de $b_y = 0$ acarretará as diferenças Δx nos pontos A e B , como mostra a Fig. 6.11. O valor de θ será, pois, dado pela expressão

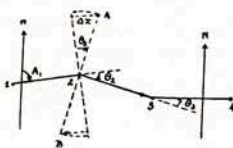


FIG. 6.11

$$\begin{aligned} \theta &= \arcsen \Delta x_A / (y_A - y_N) \\ &= -\arcsen \Delta x_B / (y_B - y_N) \end{aligned} \quad (6.3c)$$

ou, para um bom voo, onde as deflexões sejam pequenas,

$$\theta = 6366 \, \Delta x_P / (y_P - y_N)$$

Acreditamos, porém, que se não for usado giropiloto dificilmente poderá ser usada esta expressão.

Em cada par, através dos pontos de transporte A e B , teremos sempre dois valores de θ , cuja média será adotada.

Para a execução da aeropoligonação a base constante, poderemos seguir a rotina exposta para a aeropoligonação, alterando apenas os itens (d), (e), (g) e (h) e suprimindo (f) por óbvia razão.

Os itens modificados serão assim redigidos:

- d) depois de completado o trabalho no par 1-2 transfere-se a foto 2 para o porta-foto antes ocupado pela 1, orienta-se a foto 2 introduzindo *apenas* o valor de ω lido no par anterior ou medido com nível especial e coloca-se no porta-foto em que se achava a foto 2, a foto 3;
- e) orienta-se o par 2-3 dando a ambas as câmaras todos os movimentos angulares necessários sem, contudo, alterar o valor de ω na câmara 2;
- g) verifica-se se as leituras altimétricas nos pontos A_2 e B_2 apresentam a mesma diferença Δz para as que foram medidas no par anterior e registram-se os valores de x' , y' e z para A_2 , N_2 e B_2 e para A_3 , N_3 e B_3 ;
- h) introduzem-se em todos os valores de x' as correções dadas por (6.3a) e calculam-se todos os valores de x e y , da mesma forma que na aeropoligonação. Aqui, porém, como fazemos sempre $b_y = 0$, não é possível fazer o contrôlo das coordenadas planimétricas dos pontos A e B, comuns aos dois pares consecutivos.

A nosso ver é possível operar com sucesso em aparelhos de segunda ordem, desprovidos de inversão de base, uma variante simplificada do método exposto. Essa variante consiste em ajustar a escala variando b_x e conservando sempre b_y apenas ou b_y e b_z iguais a zero. No primeiro caso teríamos o que se poderia denominar "aeropoligonação a azimuth constante" e no segundo "aerocaminhamento a azimuth constante". Nessa variante teríamos evitado o cálculo da expressão (6.3a) e, para a aeropoligonação, bastaria modificar os itens (d) e (e) da rotina, conservando todos os demais. No caso do aerocaminhamento ficariam também de pé as observações que fizemos sobre a orientação progressiva. Da mesma forma, também poderia ser empregado o "aeronivelamento a azimuth constante".

D) Aerotriangulação com fotogramas convergentes

A aerotriangulação com fotogramas convergentes foi idealizada pela casa Zeiss, mediante a utilização de duas câmaras normais conjugadas e tendo seus eixos óticos formando um ângulo de 30° . Essas

câmaras (Fig. 6.12) são sincronizadas aos 0s,0005, permitindo, praticamente, a simultaneidade das fotografias. Uma série destas pode ser vista esquematicamente na Fig. 6.13. Aí vemos que as duas fotos tiradas do mesmo ponto cobrem uma área comum de 30% e que a área de uma dessas fotos vai ser coberta quase totalmente por uma das fotos seguintes. Então, para realizar uma aerotriangulação onde

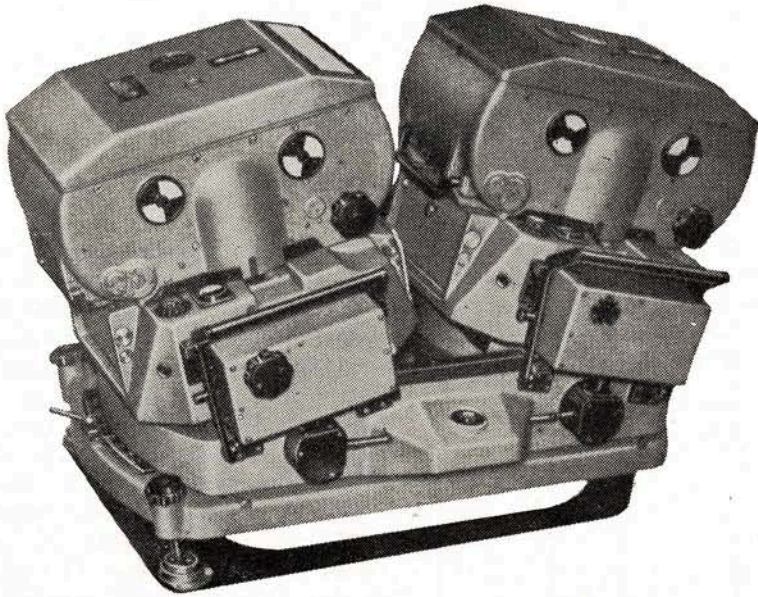


FIG. 6.12

os estereogramas são formados pelas fotos A_1B_2 , A_2B_3 , etc., será necessário um artifício para passar de um par ao seguinte. Supondo terminado o trabalho com o par A_1B_2 , a posição do fotograma B_2 estará perfeitamente definida no espaço (orientação externa). Ora, como as fotos A_2 e B_2 foram tiradas no mesmo ponto do espaço, se colocarmos no aparelho A_2 para fazer par com B_2 , teremos evidentemente,

$$bx = by = bz = 0 \quad (6.3d)$$

condição impossível de realizar nos aparelhos de projeção direta, dada a impossibilidade material de superpor as câmaras. Nos aparelhos de primeira ordem, porém, e nos de segunda com projeção indireta, será possível colocar o par no aparelho e ajustar as leituras das componentes da base para atender à condição expressa por (6.3d) e a zona comum será observada no aparelho sem estereoscopia, o

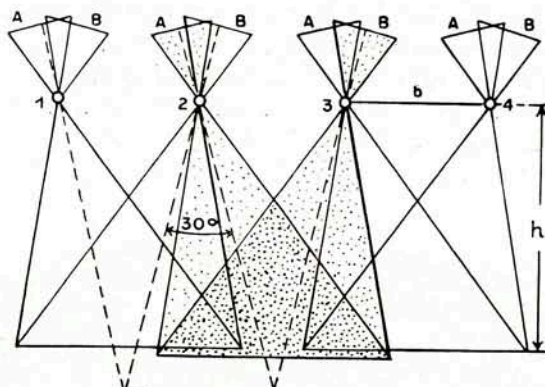


Fig. 6.13

que de resto é evidente. Então, terminado o trabalho com o par A_1B_2 , a câmara A_1 será portadora da foto A_2 e a orientação dessa nova câmara estará perfeita quando forem eliminadas as paralaxes *horizontais* P e transversais p que fatalmente surgirão no modelo plano em virtude dos erros nos parâmetros angulares da câmara A_2 . Escolhendo três pontos da projeção comum distribuídos como mostra a

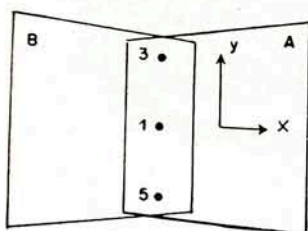


Fig. 6.14

Fig. 6.14 e neles medindo as paralaxes horizontais P e as transversais p , os valores dessas permitirão calcular as correções dos parâmetros de orientação da câmara A_2 . Deduzamos as expressões que as fornecem.

Na expressão (2.1g) os termos diferenciais de coeficiente $\vec{i}$ são os

deslocamentos dx produzidos pelos erros nos parâmetros de orientação. De acordo com a convenção já adotada, a soma desses termos, tomada com o sinal contrário, será a paralaxe horizontal P , logo, fazendo

$$x = dbx = dby = dbz = 0$$

teremos de (2.1g)

$$P = -\frac{1}{z} d\beta' + y d\gamma' \quad (6.3e)$$

Quanto à paralaxe transversal teremos de (2.1j), para as condições acima expressas,

$$p = z d\alpha' + \frac{y^2}{z} d\alpha' \quad (6.3f)$$

Para os três pontos observados teremos de (6.3e) e (6.3f) para $y=0$, $a,-a$

$$P_1 = -\frac{1}{z} d\beta' \quad p_1 = z d\alpha'$$

$$P_3 = -\frac{1}{z} d\beta' + a d\gamma' \quad p_3 = z d\alpha' + \frac{a^2}{z} d\alpha$$

$$P_5 = -\frac{1}{z} d\beta' - a d\gamma' \quad p_5 = z d\alpha' + \frac{a^2}{z} d\alpha$$

Destas expressões tiramos prontamente

$$d\gamma' = (P_3 - P_5)\rho/2a \quad (6.3g)$$

$$d\alpha' = (p_3 + p_5 - 2p_1)\rho z/2a^2 \quad (6.3h)$$

sendo $\rho = 6366$.

Calculados os valores de $d\gamma$ e $d\alpha$ com as expressões acima, a passagem para dk e $d\omega$ será feita utilizando o monograma da Fig. 3.1. A agenda Zeiss apresenta um exemplo prático da aplicação do método e aqui vamos reproduzi-lo seguindo outro caminho; as paralaxes horizontais são aí medidas através de bx e, como se trata de diferenças, será lícito substituir nas fórmulas deduzidas P por bx , da mesma forma que substituímos p por by :

$$z = 360 \text{ mm} \quad a = 160 \text{ mm} \quad \rho/2a = 19,81 \quad z\rho/2a^2 = 47,14$$

bx by

$$1 \quad 0,19 \quad 30,09 \quad P_3 - P_5 = -0,29 \quad d\gamma' = -0,29 \times 19,81 = -5,7$$

$$3 \quad 0,19 \quad 30,27$$

$$5 \quad 0,48 \quad 30,21 \quad p_3 + p_5 - 2p_1 = 0,30 \quad d\alpha' = 0,30 \times 47,14 = 14,1$$

Do monograma (Fig. 3.1): $dk' = 2,3$ $d\omega' = 15,1$

A correção do parâmetro ϕ será efetuada pelo método ótico-mecânico, eliminando as paralaxes restantes, depois de introduzidas os outros parâmetros.

Orientada a câmara A_2 em relação à B_2 a foto que ocupa o porta-chapa desta será substituída pela B_3 , que será orientada em relação à A_2 . Nessa orientação poderá ser adotada a técnica adequada a qualquer dos métodos de aerotriangulação anteriormente descritos. Eximimo-nos de particularizar a rotina peculiar à concatenação de fotogramas convergentes, pois, pelo que ficou dito, fácil será organizá-la.

CAPÍTULO VII

ESTUDO DOS ERROS

7.1 — As fontes de erro

Foi v. Gruber quem primeiro abordou o estudo da propagação dos erros nas faixas de aerotriangulação. Considerou êle a preponderância dos erros sistemáticos e estabeleceu as leis de propagação dos mesmos, expressas em forma de polinômios do segundo grau. As fórmulas que deduziu, praticamente não se alteraram até o presente, podendo ser obtidos bons resultados com a sua aplicação.

A teoria desenvolvida por v. Gruber não satisfaz, porém, aos investigadores mais exigentes, que não puderam admitir como sistemáticos erros que variavam até ao repetir-se a passagem da mesma faixa no mesmo aparelho. De fato, embora as fórmulas aplicadas exprimissem de forma bastante satisfatória as leis de propagação sobre as coordenadas instrumentais medidas, os erros de fechamento eram realmente variáveis. Foram necessários vários anos de aprofundado estudo dos especialistas para que tal ocorrência tivesse sua explicação.

Ao expormos a técnica instrumental, vimos que uma aerotriangulação é o resultado de justaposições de orientações relativas. Em tais circunstâncias, o ponto de partida para as investigações teve de ser a pesquisa da orientação relativa. Esta exige a determinação de 5 parâmetros, entre os quais existe uma correlação perfeitamente definida. Ora, o método dos mínimos quadrados, desenvolvido para a aplicação dos geodestas e topógrafos, em sua prática corrente, não trata de observações correlacionadas e isto dificultava sobremodo uma ampla investigação do assunto.

A inaplicabilidade dos processos clássicos dos mínimos quadrados à determinação dos erros da orientação relativa manifestou-se pela primeira vez quando, em 1934, R. Finsterwalder tentou obter, através do método dos mínimos quadrados, os erros médios dos parâmetros de orientação determinados pelo processo ótico-mecânico. Tendo realizado 25 vezes a orientação de um mesmo par por êsse processo, determinou o erro médio de uma determinação de cada

parâmetro. Em seguida, atribuindo à medida de uma paralaxe transversal o erro médio de $\pm 0,03$ mm, calculou esses mesmos erros médios aplicando o método dos mínimos quadrados às seis equações de condição expressas pela tabela 2.2-I. Obteve concordância razoável para os erros médios de φ , bastante menos razoável para os de ω e deploravelmente desconcertantes para os de κ . Em 1940 E. Gotthardt demonstrou que as discrepâncias assinaladas por Finsterwalder eram devidas à correlação das variáveis em jogo. Finalmente, em 1943, Bachmann realizou um notável trabalho em que logrou harmonizar a teoria e a prática e demonstrar matematicamente como deveriam ser calculados os erros que se deviam esperar do emprego do método ótico-mecânico de v. Gruber.

Tomando como ponto de partida os seus próprios estudos sobre a orientação relativa pelo processo de v. Gruber, Bachmann realizou em 1946 um profundo trabalho sobre a compensação das triangulações aéreas pelo método dos mínimos quadrados, admitindo como premissa a existência exclusiva de erros acidentais. Nesse trabalho evidenciou-se o que podemos denominar de “dupla acumulação de erros” ficando claro que esse fenômeno era responsável pela associação dos erros acidentais aos sistemáticos, dando à deformação da faixa o aspecto de estar ela sofrendo apenas o efeito de erros puramente sistemáticos. De fato Bachmann deduziu para a compensação dos erros acidentais polinômios do terceiro grau.

O fenômeno da acumulação dupla já havia sido observado em 1944 por Gotthardt e devemos sua divulgação de maneira extrema-

TABELA 7.2-I

erros acidentais	erros acumulados	erros duplamente acumulados
v	v'	v''
0,7	0,7	0,7
0,1	0,8	1,5
-1,0	-0,2	1,3
-2,6	-2,8	-1,5
0,6	-2,2	-3,7
0,9	-1,3	-5,0
1,3	0,0	-5,0
0,1	0,1	-4,9
-0,8	-0,7	-5,6
-2,3	-3,0	-8,6
2,2	-0,8	-9,4
-0,4	-1,2	-10,6
0,9	-0,3	-10,9
-0,2	-0,5	-11,4
-0,3	-0,8	-12,2
1,0	0,2	-12,0
-0,9	-0,7	-12,7
-1,5	-2,2	-14,9

TABELA 7.2-II

erros acidentais	erros acumulados	erros duplamente acumulados
v	v'	v''
-0,4	-0,4	-0,4
0,6	0,2	-0,2
0,6	0,8	0,6
-1,1	-0,3	0,3
0,6	0,3	0,6
0,3	0,6	1,2
1,7	2,3	3,5
-2,1	0,2	3,7
1,8	2,0	5,7
-1,3	0,7	6,4
1,2	1,9	8,3
2,6	4,5	12,8
1,1	5,6	18,4
0,1	5,7	24,1
-1,3	4,4	28,5
-1,6	2,8	31,3
-1,4	1,4	32,7

mente acessível a J. M. Zarzycki em artigo publicado na revista “Photogrammetric Engineering” no número de dezembro de 1955.

Para facilitar a compreensão de tão importante fenômeno, reproduzimos nas tabelas 7.2-I e 7.2-II os exemplos práticos que lá encontramos mas com uma pequena modificação que julgamos necessária à harmonização dos resultados com as nossas deduções futuras.

O exame destas tabelas mostra claramente que os erros duplamente acumulados apresentam-se como se fossem o resultado da acumulação de um erro sistemático. Não há dificuldade em apresentar a expressão geral dos erros duplamente acumulados. Basta para isso partir das expressões dos erros acumulados e somá-las:

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1 \\ v'_2 &= v_1 + v_2 \\ v'_3 &= v_1 + v_2 + v_3 \\ &\vdots \\ v'_i &= v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_i \end{aligned}$$

donde

$$v'' = [v'] = iv_1 + (i-1)v_2 + (i-2)v_3 + \dots + v_i \quad (7.1a)$$

Ora, como vemos nas tabelas acima, os valores de v' , que são os erros acumulados, são aproximadamente da mesma ordem de grandeza, apresentando na quase totalidade, os mesmos sinais e, então, a dupla acumulação, da qual decorrem os erros v'' , apresenta-se como se resultasse da simples acumulação de um erro sistemático.

Ora, numa aerotriangulação onde só conheçamos a orientação rigorosa dos pares extremos, que são apoiados no terreno, o que se nos apresenta no último par é o resultado, como veremos, de erros duplamente acumulados, segundo a expressão (7.1a). Consequentemente, o caminho para a distribuição de tal erro é o de considerar que nos defrontamos com um problema de observações condicionadas. A equação de condição será obtida fazendo em (7.1a) $i=n$, isto é,

$$nv_1 + (n-1)v_2 + (n-2)v_3 + \dots + v_i = W \quad (7.1b)$$

onde W é o erro de fechamento, igual a $[v']$. Considerando agora que os pesos de v devem ser iguais aos números de vezes com que concorrem para a formação de W , teremos

$$p_1 = n, p_2 = (n-1), \dots, P_n = 1 \quad (7.1c)$$

Portanto, as equações correlativas que resultam de (7.1b) reduzem-se tôdas a

$$v_1 = v_2 = v_3 = \dots = C \quad (7.1d)$$

sendo C o fator correlativo; a equação normal será formada substituindo v_1, v_2 , etc. por C , em (7.1b), donde

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n)C = W$$

Tirando o valor de C e aplicando a fórmula que fornece a soma da série natural dos números inteiros de 1 a n , teremos

$$C = 2W/n(n+1)$$

Então, tendo em vista (7.1c), podemos transformar (7.1a) em

$$v'' = (1 + 2 + 3 + \dots + i)C$$

ou,

$$v'' = i(i-1)C/2 \quad (7.2e)$$

Podemos, pois, concluir, que v'' pode ser calculado como se fosse o resultado da acumulação de um erro sistemático C e que, na realidade é um fator correlativo. Zarzycki propõe que um erro dessa natureza seja denominado “erro sistemático fictício”, o que nos parece bastante apropriado.

A fim de facilitar as nossas deduções futuras, vamos deduzir ainda as expressões que fornecem os erros altimétricos dos pontos nadirais. Examinando a expressão (2.1g) concluímos que os termos diferenciais de coeficiente $\vec{i}$ representam as translações diferenciais, segundo a direção x , produzidas pelos diversos erros nos parâmetros de orientação. Como só nos interessam os pontos nadirais e as fotos consideradas são verticais, poderemos fazer em (2.1g), para os deslocamentos da câmara esquerda, cujo ponto nadiral designaremos por N_{i-1} ,

$$\begin{aligned} y &= 0 & dbx &= 0 \\ d\beta &= \Delta\varphi_{i-1} & dbz &= \Delta bz_{i-1} \end{aligned}$$

onde fizemos $dbx=0$ porque convencionamos que todos os deslocamentos segundo bx são dados à câmara i . Assim, teremos:

$$dx' = z(1 + \frac{x^2}{z^2})\Delta\varphi_{i-1} + \frac{x}{z} \Delta bz_{i-1} \quad (7.1f)$$

e, para a câmara direita, i , teremos

$$x = x-b \quad y = 0 \quad dbx = \Delta b_i \quad d\beta = \Delta\varphi_i \quad dbz = \Delta bz_{i-1}$$

donde

$$dx'' = z \left[1 + \frac{(x-b)^2}{z^2} \right] \Delta\varphi_{i-1} + \Delta b_i + \frac{x-b}{z} \Delta bz_i \quad (7.1g)$$

Correspondendo o ponto nadiral esquerdo à câmara de ré, teremos aí $x=0$, logo, as expressões (7.1f) e (7.1g) transformam-se em

$$N_{i-1} \left\{ \begin{aligned} dx' &= z\Delta\varphi_{i-1} \\ dx'' &= z(1 + \frac{b^2}{z^2})\Delta\varphi_i + \Delta b_i - \frac{b}{z} \Delta bz_i \end{aligned} \right.$$

e para N_i , como $x=b$, tiramos de (7.1f) e (7.1g),

$$N_i \begin{cases} dx' = z(1 + \frac{b^2}{z^2}) \Delta \varphi_{i-1} + \frac{b}{z} \Delta bz_{i-1} \\ dx'' = z \Delta \varphi_i + \Delta b_i \end{cases}$$

As diferenças $(dx''-dx')$ são as paralaxes horizontais que multiplicadas por z/b vão fornecer os erros altimétricos δz_{i-1} e δz_i :

$$\delta z_{i-1} = -\frac{z^2}{b} \Delta \varphi_{i-1} + \frac{z^2 + b^2}{b} \Delta \varphi_i + \frac{z}{b} \Delta b_i - \Delta bz_i \quad (7.1h)$$

$$\delta z_i = -\frac{z^2 + b^2}{b} \Delta \varphi_{i-1} + \frac{z^2}{b} \Delta \varphi_i + \frac{z}{b} \Delta b_i - \Delta bz_{i-1} \quad (7.1i)$$

Estabelecidas estas fórmulas podemos iniciar o estudo da propagação dos erros, para os vários métodos de aerotriangulação expostos no capítulo precedente. Antes porém de fazê-lo, queremos mencionar que em 1952 R. Roelofs apresentou ao Congresso de Fotogrametria de Washington um completo estudo da aplicação do método dos mínimos quadrados à compensação de uma faixa de aerotriangulação, atendendo à correlação das variáveis em jogo. Tal método, extremamente laborioso, permitiu a J. Van Der Weele concluir que, com as necessárias transformações e simplificações, seriam também obtidos, como nas pesquisas de Bachmann, polinômios do terceiro grau que, na realidade, representavam um refinamento das fórmulas de v. Gruber.

No estudo que faremos a seguir tomaremos em consideração os erros sistemáticos e acidentais, aproveitando-nos das conclusões aqui tiradas sobre a dupla acumulação dos erros.

7.2 — Aeropoligonação

Imaginemos que numa aeropoligonação o par $(i-1)$, i , durante a orientação progressiva, tenha sido, por hipótese, orientado sem erro algum. Então, se introduzirmos na câmara $(i-1)$ os movimentos que representam os erros verdadeiros

$$\begin{aligned} \Delta \kappa_{i-1} \\ \Delta \omega_{i-1} \\ \Delta \varphi_{i-1} \\ \Delta by_{i-1} \\ \Delta bz_{i-1} \end{aligned}$$

a anulação das paralaxes transversais para restaurar a orientação relativa será efetuada introduzindo na câmara i as seguintes correções:

$$\begin{aligned}
 \Delta \kappa'_i &= \Delta \kappa_{i-1} \\
 \Delta \omega_i &= \Delta \omega_{i-1} \\
 \Delta \varphi_i &= \Delta \varphi_{i-1} \\
 \Delta by_i &= \Delta by_{i-1} + b \Delta \kappa_{i-1} \\
 \Delta bz_i &= \Delta bz_{i-1} - b \Delta \varphi_{i-1}
 \end{aligned} \tag{7.2a}$$

A não ser a inclinação $\Delta \omega_{i-1}$ que acarreta paralaxes transversais eliminadas imediatamente com inclinação idêntica da câmara i , as demais correções requerem uma explicação mais detalhada. De fato, como estamos cuidando de fotografamas verticais, podemos fazer na tabela 2.2-I

$$\begin{aligned}
 d\gamma' &= \Delta \kappa_{i-1} \\
 d\beta' &= \Delta \varphi_{i-1} \\
 dby' &= \Delta by_i - \Delta by_{i-1} \\
 dbz' &= \Delta bz_i - \Delta bz_{i-1}
 \end{aligned}$$

Consequentemente, se considerarmos nulos na tabela 2.2-I todos os parâmetros exceto $d\gamma' = \Delta \kappa_{i-1}$ e $dby_i = \Delta by_i - \Delta by_{i-1}$, teremos

$$p_1 = -b \Delta \kappa_{i-1} + \Delta by_i - \Delta by_{i-1}$$

e agora, considerando nulos todos os parâmetros, exceto $d\beta' = \Delta \varphi_{i-1}$ e $dbz' = \Delta bz_i - \Delta bz_{i-1}$, virá

$$p_3 = -p_5 = -\frac{ab}{z} \Delta \varphi_{i-1} + \frac{a}{z} (\Delta bz_i - \Delta bz_{i-1})$$

Então, se fizermos nestas duas últimas expressões $p_1 = p_3 = p_5 = 0$, poderemos tirar os valores de Δby_i e Δbz_i , obtendo as duas últimas fórmulas do grupo (7.2a).

Considerando agora que durante a orientação relativa estão presentes os erros sistemáticos $\overline{d\kappa}$, $\overline{d\omega}$, $\overline{d\varphi}$, $\overline{dby}$ e $\overline{dbz}$ e os acidentais $d\kappa$, $d\varphi$, $d\omega$, dby e dbz , as expressões (7.2a) transformam-se em

$$\begin{aligned}
 \Delta \kappa_i &= \Delta \kappa_{i-1} + \overline{d\kappa} + d\kappa_i \\
 \Delta \omega_i &= \Delta \omega_{i-1} + \overline{d\omega} + d\omega_i \\
 \Delta \varphi_i &= \Delta \varphi_{i-1} + \overline{d\varphi} + d\varphi_i \\
 \Delta by_i &= \Delta by_{i-1} + b \Delta \kappa_{i-1} + \overline{dby} + dby_i \\
 \Delta bz_i &= \Delta bz_{i-1} + b \Delta \varphi_{i-1} + \overline{dbz} + dbz_i
 \end{aligned} \tag{7.2b}$$

A penúltima destas expressões mostra que o erro no parâmetro κ reflete-se sobre by acarretando um erro no azimuth geral do par. Da mesma maneira, o erro em φ produzirá uma alteração em bz produzindo um desnivelamento longitudinal do modelo. No desenvolvimento que faremos a seguir mostraremos que esses erros se propagam durante a orientação progressiva obedecendo a leis perfeitamente definidas.

Partindo das expressões (7.2b) podemos escrevê-las explicitamente para cada uma das câmaras que se sucedem durante a orientação progressiva. Mas não são os elementos expressos em (7.2b) que nos interessam diretamente e sim os erros das coordenadas dados em função daqueles elementos. Para deduzirmos a expressão de Δy podemos partir de (2.1h) e (2.1i), a primeira delas fornecendo o deslocamento da imagem devido à desorientação da câmara de ré (i-1) e a segunda o que decorre da desorientação da câmara de vante i. Como no momento só nos interessam os pontos situados no eixo da faixa e estamos considerando o caso de fotogramas nadirais, podemos fazer $y=0$ e

$$\begin{array}{lll} dz & \Delta \omega_{i-1} & d\alpha' = \Delta \omega_i \\ \text{em (2.1h)} \quad d\gamma & = \Delta \kappa_{i-1} & \text{e, em (2.1i)} \quad d\gamma' = \Delta \kappa_i \\ dby & = \Delta by_{i-1} & dby' = \Delta by_i \end{array}$$

e, assim, teremos

$$\begin{aligned} dy &= z\Delta \omega_{i-1} + x\Delta \kappa_{i-1} + \Delta by_{i-1} \\ dy' &= z\Delta \omega_i + (x-b)\Delta \kappa_i + \Delta by_i \end{aligned}$$

A diferença entre estas duas expressões é a paralaxe transversal residual. Então, ao medir a coordenada do ponto a que essa paralaxe corresponde o operador instintivamente procurará pôr a marca esteoscópica no ponto que divide $dy'-dy$ em duas partes iguais, logo, o erro Δy será igual à semi-soma de dy e dy' . Assim sendo, teremos

$$\begin{aligned} \Delta y &= [z\Delta \omega_{i-1} + x\Delta \kappa_{i-1} + \Delta by_{i-1} + \\ &\quad + z\Delta \omega_i + (x-b)\Delta \kappa_i + \Delta by_i]/2 \end{aligned}$$

logo, para o ponto nadiral N_{i-1} , em que temos $x=0$ e para o ponto N_i , onde $x=b$, teremos respectivamente

$$\begin{aligned} \Delta y_{i-1} &= \frac{1}{2}(\Delta \omega_{i-1} + \Delta \omega_i) - \frac{1}{2} b\Delta \kappa_i + \frac{1}{2}(\Delta by_{i-1} + \Delta by_i) \\ \Delta y_i &= \frac{1}{2}(\Delta \omega_{i-1} + \Delta \omega_i) + \frac{1}{2} b\Delta \kappa_{i-1} + \frac{1}{2}(\Delta by_{i-1} + \Delta by_i) \end{aligned}$$

Daí tiramos imediatamente

$$\Delta y_i = \Delta y_{i-1} + \frac{b}{2}(\Delta \kappa_{i-1} + \Delta \kappa_i)$$

ou, tendo em vista a primeira expressão de (7.1b),

$$\Delta y_i = \Delta y_{i-1} + b\Delta \kappa_{i-1} + \frac{b}{2}(\overline{d\kappa} + d\kappa_i) \quad (7.2c)$$

Particularizando esta expressão para cada um dos pontos nadirais, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 \Delta y_2 &= \frac{b}{2}(\overline{dk} + dk_2) \\
 \Delta y_3 - \Delta y_2 &= b\Delta\kappa_2 + \frac{b}{2}(\overline{dk} + dk_3) \\
 \Delta y_4 - \Delta y_3 &= b\Delta\kappa_3 + \frac{b}{2}(\overline{dk} + dk_4) \\
 &\vdots \\
 \Delta y_i - \Delta y_{i-1} &= b\Delta\kappa_{i-1} + \frac{b}{2}(\overline{dk} + dk_i)
 \end{aligned}$$

Somando estas expressões membro a membro, teremos

$$\Delta y_i = b \sum_2^{i-1} \Delta\kappa + \frac{b}{2}(i-1)\overline{dk} + \frac{b}{2} \sum_2^i dk_i \quad (7.2d)$$

A soma $\sum_2^{i-1} \Delta\kappa$ é um caso típico de dupla acumulação que deve ser tratado como se segue. Da primeira expressão do grupo (7.2b) particularizada para cada projetor, tiramos:

$$\begin{aligned}
 \Delta\kappa_2 &= \overline{dk} + dk_2 = \overline{dk} + dk_2 \\
 \Delta\kappa_3 &= \Delta\kappa_2 + \overline{dk} + dk_3 = 2\overline{dk} + dk_2 + dk_3 \\
 \Delta\kappa_4 &= \Delta\kappa_3 + \overline{dk} + dk_4 = 3\overline{dk} + dk_2 + dk_3 + dk_4 \\
 &\vdots \\
 \Delta\kappa_{i-1} &= \Delta\kappa_{i-2} + \overline{dk} + dk_{i-1} = (i-2)\overline{dk} + dk_2 + dk_3 + \\
 &\quad dk_4 \dots + dk_i
 \end{aligned}$$

Somando membro a membro, teremos

$$\sum_2^{i-1} \Delta\kappa = [1 + 2 + 3 + \dots + (i-2)] \overline{dk} + \\
 + (i-2)dk_2 + (i-3)dk_3 + (i-4)dk_4 + \dots + dk_i$$

A soma dos termos em dk_i é exatamente da mesma forma que (7.1b), logo, podemos substituir dk_i pelo erro sistemático fictício dk' e transformar a expressão precedente em

$$\sum_2^{i-1} \Delta\kappa = [1 + 2 + 3 + \dots + (i-2)] (\overline{dk} + dk')$$

ou, tendo em vista a expressão que fornece a soma dos números naturais de 1 a $(i-2)$ e fazendo

virá

$$\overline{d\kappa} + d\kappa' = \overline{dA}$$

$$\sum_2^{i-1} \Delta\kappa = (i-1)(i-2) \overline{dA}/2 \quad (7.2e)$$

e a expressão (7.2d) transforma-se em

$$\Delta y_i = b(i-1)\overline{d\kappa}/2 + b(i-1)(i-2)\overline{dA}/2 + \sum_2^i d\kappa$$

Nesta expressão a acumulação simples dos erros acidentais pode ser abandonada e, assim a fórmula reduz-se a

$$\Delta y_i = b(i-1)\overline{d\kappa}/2 + b(i-1)(i-2)\overline{dA}/2 \quad (7.2f)$$

Então, como b é praticamente constante, bem como $\overline{d\kappa}$ e $\overline{dA}$, se atribuírmos a i valores inteiros sucessivos, construiremos um gráfico como o que vemos na Fig. 7.1, mostrando que a orientação dos eixos

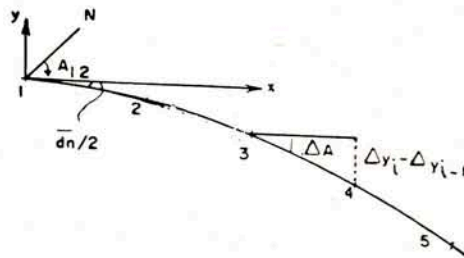


Fig. 7.1

instrumentais varia progressivamente à razão de $\overline{dA}$. Consequentemente podemos dizer que $\overline{dA}$ é um erro sistemático fictício de azimuth, responsável pela variação da orientação dos eixos do aparelho. Se considerarmos os erros Δy em dois pontos nadirais consecutivos, a Fig. 7.1 nos mostra que o desvio dos eixos instrumentais no par considerado será expreso por

$$\Delta A = (\Delta y_i - \Delta y_{i-1})/b$$

Ora, se em (7.2f) fizermos $i=i-1$ e subtrairmos de (7.2f) a expressão resultante, teremos

$$\Delta y_i - \Delta y_{i-1} = b \overline{d\kappa}/2 + b(i-2)\overline{dA}$$

que substituída na expressão precedente conduz a

$$\Delta A = \overline{d\kappa}/2 + (i-2)\overline{dA} \quad (7.2g)$$

Se no primeiro par da faixa determinamos, em função do apoio terrestre, o azimuth A_{12} , onde 12 indica o par 1-2, a Fig. 7.1 nos mostra que o azimuth do par $(i-1)$, i será dado por

$$A_{(i-1),i} = A_{12} - \overline{d\kappa}/2 + \Delta A$$

ou, de acôrdo com (7.2g)

$$A_{(i-1),i} = A_{12} + (i-2)\overline{dA} \quad (7.2h)$$

Se determinarmos também o azimute no último par da faixa, constituído pelos projetores (n-1) e n, teremos, de acôrdo com (7.2h),

$$A_{(n-1),n} = A_{12} + (n-2)\overline{dA}$$

donde podemos deduzir o valor de $\overline{dA}$

$$\overline{dA} = \frac{A_{(n-1),n} - A_{12}}{n-2} \quad (7.2i)$$

Conhecido $\overline{dA}$ através desta expressão poderá ser conhecido o azimute em qualquer par, usando (7.2h).

Examinando a Fig. 7.1 verificamos que se a curva determinada pelos pontos nadirais tiver um grande raio, o que na realidade acontece na prática, as bases, que são cordas dessa curva, podem ser consideradas confundidas com ela. Por outro lado, a distância de um ponto nadiral à origem pode ser tomada muito aproximadamente como $x = b(i-1)$ pois b pouco se afasta de um valor médio, consequentemente, substituindo em (7.2f) $i-1$ por x/b , teremos

$$\Delta y = (\overline{d\kappa}/2 - \overline{dA}/2)x + (\overline{dA}/2b)x^2$$

Nesta expressão suprimimos o índice da correção Δy , porque já vimos a possibilidade de identificar as bases com os arcos de que são cordas, e considerar a expressão deduzida como uma função contínua de x . Examinando esta expressão verificamos que para $x=0$ teremos $\Delta y=0$ o que mostra, como era de esperar, ser nulo o erro na origem da faixa. Como, por outro lado, os coeficientes de x devem ser sempre determinados em função do apóio terrestre, será conveniente representar as constantes por símbolos literais, o que nos permitirá escrever, de maneira geral,

$$y = b_1x + b_2x^2 \quad (7.2j)$$

O conhecimento dos erros sôbre as abscissas x depende do conhecimento dos erros altimétricos e, em vista disso, estuda-los-emos em primeiro lugar. A fim de evitar a constante repetição de palavras, estabeleçamos, de um modo geral, o resultado da soma de quaisquer expressões de recorrência, caracterizadas pela possibilidade de determinar qualquer quantidade numa série, em função da que lhe precede imediatamente. Tais são as expressões do grupo (7.2b) que são tôdas da forma

$$M_i = M_{i-1} + \overline{P} + Q_i$$

donde

$$M_i - M_{i-1} = \overline{P} + Q_i$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{n=i} (M_n - M_{n-1}) &= (M_3 - M_2) + (M_4 - M_3) + \dots + \\ &+ (M_{i-2} - M_{i-3}) + (M_{i-1} - M_{i-2}) + (M_i - M_{i-1}) = \\ &= M_i = (i-1)\bar{P} + \sum_2^i Q \end{aligned} \quad (7.2k)$$

Estabelecida esta expressão podemos iniciar o estudo dos erros altimétricos.

Considerando o par (i-1),i, o erro da diferença de nível, medida no aparelho, entre os pontos nadirais N_i e N_{i-1} , produzido pelos erros nos parâmetros de orientação, é dado pela diferença entre as expressões (7.1h) e (7.1i):

$$\begin{aligned} d\hat{z}z' &= -b(\Delta\varphi_{i-1} + \Delta\varphi_i) + \Delta bz_i - \Delta bz_{i-1} \\ &= 2b\Delta\varphi_{i-1} - b(\Delta\varphi_i - \Delta\varphi_{i-1}) + (\Delta bz_i - \Delta bz_{i-1}) \end{aligned}$$

Considerando, por hipótese, o par (i-2), (i-1) isento de erro, no transporte dêle para o (i-1), i será cometido um erro acidental de leitura no ponto N_{i-1} , cujo valor total exprimiremos por dz_{i-1} e que deverá ser somado ao erro acima expresso:

$$\Delta z_i - \Delta z_{i-1} = -2b\Delta\varphi_{i-1} - b(\Delta\varphi_i - \Delta\varphi_{i-1}) + (\Delta bz_i - \Delta bz_{i-1}) + dz_{i-1}$$

O erro sistemático de leitura altimétrica foi ignorado porque êle acarretará um efeito igual sobre tôdas as cotas, eliminado logo no primeiro par por um simples deslocamento do zero instrumental. Somando membro a membro as expressões que se tiram da precedente fazendo sucessivamente

$$i = 2, 3, 4, \dots, i$$

e tendo em vista que $\Delta\varphi_1 = bz_1 = dz_1 = 0$, teremos de (7.2k)

$$\Delta z_i = -2b \sum_2^{i-1} \Delta\varphi - b\Delta\varphi_i + \Delta bz_i + \sum_2^{i-1} dz \quad (7.2l)$$

Ora, aplicando o mesmo critério à última expressão de (7.2b), teremos

$$\Delta bz_i = b \sum_2^{i-1} \Delta\varphi + (i-1)\overline{dbz} + \sum_2^i dbz \quad (7.2m)$$

então, substituindo êste valor em (7.2l),

$$\Delta z_i = -b \sum_2^{i-1} \Delta\varphi - b\Delta\varphi_i + (i-1)\overline{dbz} + \sum_2^i dbz + \sum_2^{i-1} dz$$

Nesta expressão $\sum_2^{i-1} \Delta\varphi$ é um caso de acumulação dupla, exatamente

da mesma natureza que $\sum_2^{i-1} \Delta\kappa$ logo, para obtermos $\sum_2^{i-1} \Delta\varphi$ partindo

da terceira fórmula do grupo (7.2b), seguiríamos caminho exatamente idêntico ao trilhado para obtermos (7.2e), partindo da primeira daquele grupo. Assim sendo, poderemos substituir em (7.2e) $\overline{dA}$ por $\overline{d\phi}$ e escrever

$$\sum_2^{i-1} \Delta \varphi = (i-1)(i-2)\overline{d\phi}/2 \quad (7.2n)$$

sendo

$$\overline{d\phi} = d\varphi + d\varphi'$$

o erro sistemático fictício de nivelamento longitudinal. Então, substituindo $\sum_2^{i-1} \Delta \varphi$

$$\Delta z_i = -b(i-1)(i-2)\overline{d\phi}/2 - b\Delta\varphi_i + (i-1)\overline{dbz} + \sum_2^i dbz + \sum_1^{i-1} dz$$

onde ainda necessitamos substituir $\Delta\varphi_i$ pelo valor que obtemos partindo da terceira expressão do grupo (7.2b) e aplicando a fórmula geral (7.2k) que fornece

$$\Delta\varphi_i = (i-1)\overline{d\varphi} + \sum_2^i d\varphi \quad (7.2o)$$

Teremos, assim, abandonando a soma geral dos erros acidentais,

$$\Delta z_i = -b(i-1)(\overline{d\varphi} + \overline{dbz}/b) - b(i-1)(i-2)\overline{d\phi}/2 \quad (7.2p)$$

Lançando mão dos mesmos argumentos invocados para o traçado da Fig. 7.1, poderemos traçar a Fig. 7.2, que mostra o encurvamento

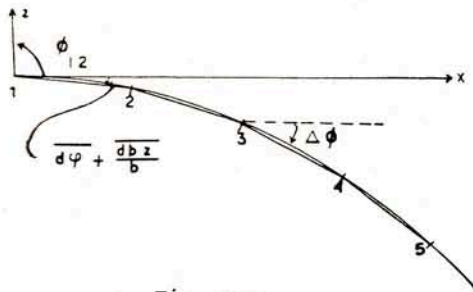


Fig. 7.2

do modelo no plano xz, em consequência do erro $\overline{d\phi}$, denominado geralmente erro de convergência e que é responsável por consideráveis erros altimétricos, particularmente se for grande o número de modelos da faixa. Outrora supunha-se que esse erro fosse de natureza puramente sistemática mas, pelo próprio desenvolvimento que fizemos, ficou claro que a dupla acumulação dos erros acidentais concorre exatamente para o mesmo fim que o erro sistemático.

Da mesma forma que partindo de (7.2f) obtivemos (7.2h) e (7.2i) poderemos deduzir, partindo de (7.2p) e seguindo a mesma marcha,

$$\phi_{(i-1),i} = \phi_{12} + (i-2)\overline{d\phi} \quad (7.2q)$$

$$\overline{d\phi} = \frac{\phi_{(n-1),n} - \phi_{12}}{n-2} \quad (7.2r)$$

Fazendo, como antes, $i-1=x/b$ e substituindo em (7.2p) teremos

$$\Delta z = -x\left(\frac{\overline{dbz}}{b} - \overline{d\varphi} - \overline{d\phi}\right) - \frac{\overline{d\phi}}{2b} x^2$$

ou, representando literalmente os coeficientes de x e x^2 ,

$$\Delta z = c_1 x + c_2 x^2 \quad (7.2s)$$

Podemos agora estudar os erros das abscissas, partindo do erro altimétrico. Sendo Δz_i o erro altimétrico verdadeiro no ponto natural N_i , para obtermos o erro Δb_i da base que *termina* no projetor i , poderemos substituir em (7.1i) δz_i pelo erro verdadeiro e tirar o valor de Δb_i que lhe corresponde. Como, porém, isto importa numa série de transformações algébricas, vamos operá-las lentamente para que se torne claro o desenvolvimento.

Substituindo em (7.1i) δz_i pelo valor de Δz_i dado em (7.2l) e tirando o valor de $\frac{z}{b} \Delta b_i$, obteremos

$$\begin{aligned} \frac{z}{b} \Delta b_i &= -2b \sum_2^{i-1} \Delta \varphi - b \Delta \varphi_i + \Delta b z_i + \sum_2^{i-1} dz \\ &\quad - \frac{z^2}{b} (\Delta \varphi_i - \Delta \varphi_{i-1}) + b \Delta \varphi_{i-1} + \Delta b z_{i-1} \end{aligned}$$

ou, tirando da terceira e da última expressões do grupo (7.2b) os valores de $(\Delta \varphi_i - \Delta \varphi_{i-1})$ e $\Delta b z_{i-1}$, respectivamente, e substituindo acima,

$$\begin{aligned} \frac{z}{b} \Delta b_i &= -2b \sum_2^{i-1} \Delta \varphi + 2\Delta b z_i - \overline{dbz} - db z_i - b \Delta \varphi_i - \\ &\quad - \frac{z^2}{b} (\overline{d\varphi} + d\varphi_i) + \sum_2^{i-1} dz \end{aligned}$$

e, tendo em vista a expressão (7.2m) e a (7.2k) aplicada à terceira do grupo 7.2b.

$$\frac{z}{b} \Delta b_i = \begin{cases} \sum_2^{i-1} dz \\ + 2(i-2)\overline{dbz} + \overline{dbz} + 2\sum_2^{i-1} dbz + db z_i \\ - b(i-2)\overline{d\varphi} - \frac{z^2 + b^2}{b} \overline{d\varphi} - b \sum_3^{i-1} d\varphi - \frac{z^2 + b^2}{b} d\varphi_i \end{cases}$$

ou, fazendo

$$\overline{dbz} - \frac{z^2 + b^2}{b} = \frac{z}{b} \overline{db'}$$

$$2\overline{dbz} - b \overline{d\varphi} = \frac{z}{b} \overline{db}$$

$$dbz_i - \frac{z^2 + b^2}{b} d\varphi_i = \frac{z}{b} db'_i$$

$$dz_{i-1} + 2dbz_i - b d\varphi_i = \frac{z}{b} db_i$$

resultará

$$\Delta b_i = \overline{db'} + (i-2)\overline{db} + \sum_2^{i-1} db + db'_i$$

Fazendo nesta expressão, sucessivamente, $i=2, 3, 4, \dots$, teremos

$$\Delta b_2 = \overline{db'} + db'_2$$

$$\Delta b_3 = \overline{db'} + \overline{db} + db_3 + db'_3$$

$$\Delta b_4 = \overline{db'} + 2\overline{db} + db_3 + db_4 + db'_4$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta b_i = \overline{db'} + (i-2)\overline{db} + db_3 + db_4 + \dots + db'_i$$

Ora, como as abcissas dos pontos nadirais podem ser expressas, com bastante precisão por

$$x_i = b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_i$$

teremos $\Delta x_i = \Delta b_2 + \Delta b_3 + \Delta b_4 + \dots + \Delta b_i$

logo, para obtermos Δx_i bastará somar membro a membro as expressões anteriores, onde haverá uma acumulação dupla dos erros acidentais db_i , para formar o êrro sistemático fictício que designaremos por $\overline{Db}$ e, assim, teremos a expressão que se segue, onde abandonamos a soma simples dos erros acidentais db_i :

$$\Delta x_i = (i-1)\overline{db'} + (i-1)(i-2)\overline{Db}/2 \quad (7.2t)$$

Como nos casos anteriores, poderemos substituir nesta expressão i por $x/b + 1$ e representar as constantes por símbolos literais. Assim procedendo, obteremos o polinômio que se segue:

$$\Delta x = a_1 x + a_2 x^2 \quad (7.2u)$$

Para estudar o êrro progressivo de escala, decorrente do êrro das bases, é necessário atentar para uma sutileza. De fato, sendo Δx_i obtido somando os valores sucessivos de Δb_i , de $i=2$ a $i=i$, claro está que deveria verificar-se a identidade

$$\Delta x_i - \Delta x_{i-1} = \Delta b_i$$

que, no entanto é destruída pela acumulação dupla dos erros acidentais. Teremos, em vista disso,

$$\Delta x_i - \Delta x_{i-1} = ds_i$$

sendo ds_i o erro da distância entre os pontos nadirais N_{i-1} e N_i , medida no modelo. Sendo S o valor natural dessa distância e K o denominador da escala de restituição, variável com s , teremos

$$s = S/K$$

donde

$$1g_s s = 1g_e S - 1g_e K$$

e, conseqüentemente,

$$ds/s = - dK/K \quad (7.2v)$$

Ora, fazendo em (7.2t) $i=i-1$ e subtraindo o resultado de (7.2t) teremos

$$ds_i = \Delta x_i - \Delta x_{i-1} = \overline{db}' + (i-2)\overline{Db}$$

então, substituindo este valor de ds_i em (7.2v) e tirando o valor de dK , teremos

$$dK = K\overline{db}'/s + (i-2)K\overline{Db}/s$$

ou ainda, fazendo

$$K\overline{db}'/s = d\overline{K}_0$$

e

$$K\overline{Db}/s = d\overline{K}$$

$$dK = d\overline{K}_0 + (i-2)d\overline{K}$$

Se podemos determinar com rigor, em função dos pontos de apoio, o valor K_{12} do denominador da escala no primeiro par, um raciocínio análogo ao que fizemos ao deduzirmos (7.2i) permite-nos escrever para o par $(i-1), i$

$$K_{(i-1),i} = K_{12} + (i-2)d\overline{K} \quad (7.2w)$$

não havendo também dificuldade em compreendermos a legitimidade da expressão

$$\overline{dK} = \frac{K_{(n-1),n} - K_{12}}{n-2} \quad (7.2x)$$

que define o erro sistemático fictício de escala.

Deduzimos até aqui as expressões que definem os erros dos pontos situados no eixo da faixa. É claro que os pontos laterais também estão afetados de erros que podem, da mesma forma, ser expressos por polinômios onde aparecerão também as ordenadas y . Não deduziremos, no entanto essas expressões, uma vez que não as utilizaremos no método que preconizamos para a compensação dos erros da faixa, para o que escolhemos as variáveis: azimute A , denominador da escala K , inclinação longitudinal ϕ e inclinação lateral Ω . Esta última, que só afeta as cotas dos pontos laterais, pode ser facilmente deduzida dos erros das inclinações ω dos projetores.

Escrevamos a seguir a segunda expressão do grupo (7.2b) e a que obtemos nela fazendo $i=i-1$:

$$\begin{aligned}\Delta \omega_i &= \Delta \omega_{i-1} + \overline{d\omega} + d\omega_i \\ \Delta \omega_{i-1} &= \Delta \omega_{i-2} + \overline{d\omega} + d\omega_{i-1}\end{aligned}$$

Podemos então considerar que a inclinação transversal média do par (i-1),i é igual à média destas duas expressões e, assim podemos escrever:

$$\frac{1}{2} (\Delta \omega_i + \Delta \omega_{i-1}) = \frac{1}{2} (\Delta \omega_{i-1} + \Delta \omega_{i-2}) + \overline{d\omega} + \frac{1}{2} (d\omega_i + d\omega_{i-1})$$

ou, fazendo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (\Delta \omega_i + \Delta \omega_{i-1}) &= \Omega_{(i-1),i} \\ \frac{1}{2} (\Delta \omega_{i-1} + \Delta \omega_{i-2}) &= \Omega_{i-2,(i-1)} \\ \frac{1}{2} (d\omega_i + d\omega_{i-1}) &= d\Omega_{(i-1),i}\end{aligned}$$

resultará

$$\Omega_{(i-1),i} = \Omega_{(i-1),(i-2)} + \overline{d\omega} + d\Omega_{(i-1),i}$$

que, como as outras já deduzidas, é também uma expressão de recorrência. Assim sendo, poderemos particularizá-la para cada um dos pares da faixa escrevendo

$$\begin{aligned}\Omega_{23} &= \Omega_{12} + \overline{d\omega} + d\Omega_{23} \\ \Omega_{34} &= \Omega_{23} + \overline{d\omega} + d\Omega_{34} \\ \Omega_{45} &= \Omega_{34} + \overline{d\omega} + d\Omega_{45} \\ &\vdots \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\Omega_{(i-1),i} = \Omega_{(i-1),(i-2)} + \overline{d\omega} + d\Omega_{(i-1),i}$$

e, somando membro a membro e cancelando os termos semelhantes,

$$\Omega_{(i-1),i} = \Omega_{12} + (i-2)\overline{d\omega} + \sum_{23}^{i-1,i} d\Omega$$

Como neste caso não existe dupla acumulação de erros, tanto os erros acidentais como os sistemáticos deverão ser distribuídos de maneira análoga e, assim, poderemos transformar a expressão precedente em

$$\Omega_{(i-1),i} = \Omega_{12} + (i-2)\overline{d\Omega} \quad (7.2y)$$

que é exatamente da mesma forma que as já obtidas para A, ϕ e K. De (7.2y) podemos deduzir imediatamente

$$\overline{d\Omega} = \frac{\Omega_{(n-1),n} - \Omega_{12}}{n-2} \quad (7.2z)$$

que também apresenta inteira analogia às que deduzimos para $\overline{dA}$, $\overline{d\phi}$ e $\overline{dK}$.

Na série de expressões que deduzimos omitimos a influência sobre as abscissas x da curvatura da faixa em azimuth. Como porém o erro que daí resulta é exatamente da mesma natureza que o decorrente da esfericidade terrestre, estuda-lo-emos juntamente com este.

7.3 — Efeito da curvatura da Terra. Resumo das fórmulas

Se na Fig. 7.3 I, II, III, etc. são os pontos em que de um avião foram tiradas as fotografias da Terra, se considerarmos que o voo foi realizado com altitude praticamente constante, é claro que a restituição só seria perfeita se pudesse ser efetuada sobre um cilindro tangente à esfera, cujo raio estivesse para o da Terra numa relação igual à escala de restituição. Como esta é fundamentalmente variável com as necessidades práticas, também o raio da superfície deveria

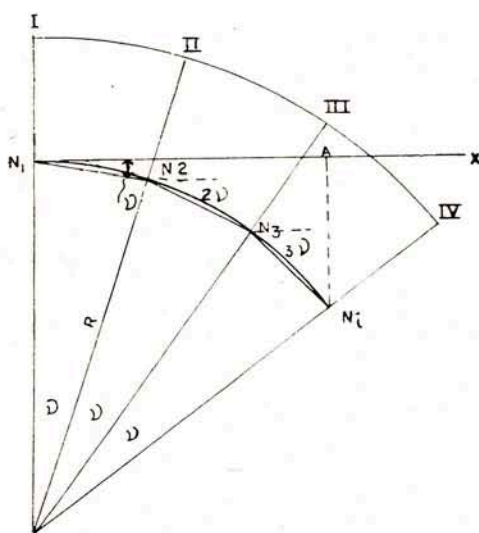


Fig. 7.3

ser variável, o que seria praticamente irrealizável nos aparelhos de restituição. Em vista disso a superfície onde se forma o modelo é sempre um plano passando por N_1 (Fig. 7.3).

Como primeira consequência da curvatura da Terra, verificamos que na aeropoligonação os raios nadirais de duas fotos consecutivas apresentam uma convergência igual ao ângulo v das verticais e, assim, os modelos óticos mostram, em relação à projeção, um

desnívelamento longitudinal que cresce progressivamente à razão de ν . Da Fig. 7.3 tiramos

$$\phi'_{12} = \nu$$

$$\phi'_{23} = 2\nu$$

$$\phi'_{34} = 3\nu$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\phi'_{(i-1),i} = (i-1)\nu$$

donde

$$\phi'_{(i-1),i} = \phi'_{12} + (i-2)\nu$$

então, como $\overline{d\phi}$ é um erro de aspecto sistemático, podemos considerar nele incluído ν , como nos faz concluir o exame da expressão (7.2q). Para determinar o efeito da curvatura terrestre sobre a altimetria observemos que se R/K é o raio médio da Terra reduzido à escala do modelo, a Fig. 7.3 nos mostra que

$$b = R\nu/K$$

consequentemente, se no segundo termo da expressão que precede imediatamente (7.2s) substituirmos b por este valor e aí fizermos $\overline{d\phi} = \nu$, teremos, na escala do modelo, o erro altimétrico, proveniente da curvatura da Terra, expresso por

$$\delta z = Kx^2/2R$$

Para obtermos o valor natural desse erro bastará multiplicar esta expressão por K , resultando

$$\Delta Z = (Kx)^2/2R$$

ou, como $Kx = X$, que é a extensão natural da faixa,

$$\Delta Z = X^2/2R$$

Para $X=50$ km, $R=6.400$ km, temos um erro altimétrico de 195 m. Vemos, assim, que o efeito da curvatura terrestre limita, por si só, a extensão das aeropoligonações. Um critério razoável é não efetuá-las para um número de pares superior a 10, mesmo porque quando $\overline{d\phi}$ e ν se somam, o erro altimétrico poderá exceder bastante o que acabamos de calcular.

O erro planimétrico, como mostra a Fig. 7.3, é igual à diferença entre a distância N_1A e o arco N_1N_i que deveria ser desenvolvido sobre N_1x . Da Fig. 7.3 tiramos

$$N_1A = \frac{R}{K} \text{sen}(i-1)\nu$$

mas, se x é o arco N_1N_i , teremos

$$(i-1)\nu = xK/R$$

logo,

$$N_1A = \frac{R}{K} \text{sen} \frac{xK}{R}$$

e, como o arco xK/R é pequeno, podemos desenvolver em série o seu seno só conservando o termo de terceira ordem; assim, teremos

$$N_1A = x - x^3K^2/6R^2$$

consequentemente, como N_1A é a abscissa instrumental, podemos exprimir o erro planimétrico por

$$\Delta x = -x^3K^2/6R^2 \quad (7.3a)$$

Para conhecermos o valor deste erro nas dimensões naturais, necessitamos multiplicar (7.3a) por K o que nos dá

$$\Delta X = -x^3K^3/6R^2$$

ou, tendo em vista que $X=xK$,

$$\Delta X = -X^3/6R^2$$

Para os valores considerados no cálculo do erro altimétrico, $X = 50$ km e $R = 6.400$ km, encontramos $\Delta X = 5$ m, o que mostra ser o erro planimétrico bastante pequeno, comparado ao altimétrico. Não podemos deixar de considerar, no entanto, que o erro $\overline{d\phi}$ pode aumentar o valor calculado, sendo seu efeito aumentar a curvatura da faixa, ou reduzir o seu raio na expressão (7.3a). Assim sendo, na expressão geral do erro de x deveremos acrescentar um termo em x^3 , definido por (7.3a). Resumindo, as expressões que fornecem os erros das coordenadas dos pontos situados no eixo da faixa serão

$$\begin{aligned} \Delta x &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ \Delta y &= b_1x + b_2x^2 \\ \Delta z &= c_1x + c_2x^2 \end{aligned} \quad (7.3b)$$

onde a primeira delas foi obtida somando a (7.2u) o termo de terceiro grau e as duas outras são as mesmas fórmulas (7.2j) e (7.2s).

Caso haja uma mudança na origem das coordenadas tal que

$$\begin{aligned} x &= x' + p \\ y &= y' + q \\ z &= z' + r \end{aligned}$$

ao substituírmos estes valores em (7.3b) chegaríamos a

$$\begin{aligned} \Delta x' &= a' + a_1x' + a_2x'^2 + a_3x'^3 \\ \Delta y' &= b' + b_1x' + b_2x'^2 \\ \Delta z' &= c' + c_1x' + c_2x'^2 \end{aligned} \quad (7.3c)$$

onde a' , b' e c' são funções apenas de a , b e c , p , q e r

Se compararmos a Fig. 7.1 com a 7.3, verificamos que o encurvamento da faixa no plano xy deverá acarretar um erro planimétrico em x exatamente da mesma forma que o produzido pela esfericidade terrestre. Assim sendo, no termo de terceiro grau de (7.3c) estará incluído esse erro.

Conforme já tivemos oportunidade de esclarecer, nas investigações mais elaboradas as correções Δy e Δz também são expressas

por polinômios do terceiro grau, mas a experiência mostra que o grupo (7.3c) atende perfeitamente às necessidades práticas.

7.4 — Aeronivelamento

Não será aqui necessário pesquisar o erro das ordenadas porque tudo se passa exatamente como na aeropoligonação, permanecendo válidas as expressões (7.2i) e (7.2j) e, conseqüentemente, a segunda de (7.3c). Evidentemente, não acontecerá o mesmo com os erros Δz porque todos os pares são nivelados com os elementos fornecidos pelo estatoscópio. Por outro lado, como o transporte de escala é efetuado da mesma maneira que na aeropoligonação, os erros Δx dependerão dos erros Δz que se cometerem no aeronivelamento.

Tendo em vista que, no aeronivelamento, os valores de bz são considerados isentos de erro, devemos suprimir a última expressão do grupo (7.2b) e, como em cada par ambas as câmaras são orientadas em φ , a terceira expressão desse grupo deverá ser substituída por

$$\Delta \varphi_i = \overline{d\varphi} + d\varphi_i \quad (7.4a)$$

pois o erro $\Delta \varphi_{i-1}$ cometido na orientação da câmara (i-1) no par (i-2), (i-1) é completamente independente de $\Delta \varphi'_{i-1}$ que ocorre na reorientação da mesma câmara no par (i-1), i.

Fazendo na expressão que precede imediatamente (7.2l)

$$\Delta bz_i = \Delta bz_{i-1} = 0$$

teremos

$$\Delta z_i - \Delta z_{i-1} = -b(\Delta \varphi'_{i-1} + \Delta \varphi_i) + dz_{i-1}$$

ou, tendo em vista (7.4a) e a que dela se tira fazendo $i=i-1$, $\Delta \varphi_i = \Delta \varphi'_{i-1}$ e $d\varphi_i = d\varphi'_{i-1}$

$$\Delta z_i - \Delta z_{i-1} = -b(\overline{2d\varphi} + d\varphi'_{i-1} + d\varphi_i) + dz_{i-1}$$

A fim de particularizar esta expressão para cada um dos pares da faixa é necessário estabelecer inicialmente como devem ser encarados os erros no primeiro par. Para maior facilidade suporemos que o nivelamento longitudinal do mesmo foi efetuado com os dados estatoscópicos, o que permite também aplicar a expressão precedente a esse par, fazendo antes,

$$\Delta z_1 = dz_1 = 0$$

Desta forma teremos

$$\begin{aligned} \Delta z_2 &= -b(\overline{2d\varphi} + d\varphi'_1 + d\varphi_2) \\ \Delta z_3 - \Delta z_2 &= -b(\overline{2d\varphi} + d\varphi'_2 + d\varphi_3) + dz_2 \\ \Delta z_4 - \Delta z_3 &= -b(\overline{2d\varphi} + d\varphi'_3 + d\varphi_4) + dz_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \Delta z_i - \Delta z_{i-1} &= -b(\overline{2d\varphi} + d\varphi'_{i-1} + d\varphi_i) + dz_{i-1} \end{aligned}$$

A soma membro a membro destas expressões fornece

$$\begin{aligned} \Delta z_i = & -b(2\overline{d\varphi} + d\varphi'_1 + d\varphi_2) - 2b(i-2)\overline{d\varphi} + \\ & + b(\sum_2^i d\varphi + \sum_1^{i-1} d\varphi') + \sum_2^{i-1} dz \end{aligned} \quad (7.4b)$$

ou, fazendo

$$2\overline{d\varphi} + d\varphi'_1 + d\varphi_2 = \phi_{12} \quad (7.4c)$$

e abandonando as somas simples dos erros acidentais, teremos

$$\Delta z_i = -b\phi_{12} - 2b(i-2)\overline{d\varphi}$$

ou, tendo em vista que $i = x/b + 1$

$$\Delta z_i = (b\phi_{12} + 2b\overline{d\varphi}) - 2b\overline{d\varphi} x$$

donde concluímos que o erro altimétrico cresce linearmente com x e esse crescimento pode ser considerado como função apenas do erro sistemático, desde que consideramos lícito abandonar as somas dos erros puramente acidentais. Adotando o critério de substituir as constantes desta última fórmula por símbolos literais, teremos

$$\Delta z = c_0 + c_1 x \quad (7.4d)$$

Podemos agora deduzir o erro Δx . A fim de simplificar o trabalho de escrita substituamos em (7.4b) a expressão (7.4c) e façamos ainda:

$$b d\varphi'_{i-1} + b d\varphi_i + dz_{i-1} = dz'_{i-1}$$

Teremos, assim,

$$\Delta z_i = -b\phi_{12} - 2b(i-2)\overline{d\varphi} + \sum_3^{i-1} dz' + dz'_i \quad (7.4e)$$

Para obtermos Δx_i é necessário, tal como na aeropoligonação, obter o erro Δb_i num par qualquer, correspondente ao erro Δz_i . Assim sendo, devemos substituir em (7.1i) δz_i por (7.4e) e tirar o valor de

$\frac{z}{b} \Delta b_i$, fazendo antes

$$\Delta bz_i = \Delta bz_{i-1} = 0$$

$$\Delta \varphi_{i-1} = \overline{d\varphi} + d\varphi'_{i-1}$$

$$\Delta \varphi_i = \overline{d\varphi} + d\varphi_i$$

Assim operando, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{z}{b} \Delta b_i = & b(\overline{d\varphi} - \phi_{12}) - 2b(i-2)\overline{d\varphi} + \sum_3^{i-1} dz' + \frac{z^2}{b} d\varphi_i - \\ & - \frac{z^2 + b^2}{b} d\varphi'_{i-1} + dz'_1 \end{aligned}$$

Simplifiquemos ainda o trabalho de escrita fazendo nesta expressão

$$b(\overline{d\varphi} - \phi_{12}) = \frac{z}{b} \overline{db'}$$

$$-2\overline{bd}\varphi = \frac{z}{b} \overline{db}$$

$$dz'_i = \frac{z}{b} db_i$$

$$dz'_i + \frac{z^2}{b} d\varphi_i - \frac{z^2 + b^2}{b} d\varphi'_{i-1} = \frac{z}{b} db'_i$$

donde

$$\Delta b_i = \overline{db'} + (i-2)\overline{db} + \sum_3^{i-1} db + db'_i$$

Examinando o desenvolvimento que conduziu a (7.2t) verificamos que partindo da expressão que acabamos de deduzir obteremos uma fórmula idêntica a (7.2t), o que nos dispensa de repetir o desenvolvimento. Isto nos permite concluir que a planimetria pode ser tratada aqui exatamente da mesma forma que na aeropoligonação, sendo também válidas as expressões já deduzidas para o azimute A e o denominador da escala K.

Esclareçamos agora um importante aspecto do problema do aeronivelamento, relativo à determinação da inclinação longitudinal ϕ de cada modelo, uma vez que esta é, como já mencionamos, uma das variáveis que usaremos na compensação da altimetria. Conforme mostramos no parágrafo anterior, a curvatura da Terra produz na aeropoligonação um encurvamento do modelo no plano xz, sendo o ângulo das verticais ν o ângulo formado entre dois modelos consecutivos ou, mais precisamente, as suas bases, conforme mostra a Fig. 7.3. Os resíduos de distorção radial, por sua vez, produzem paralaxes transversais cuja eliminação acarreta a convergência dos raios nadirais cujo valor σ soma-se algêbricamente a ν , concorrendo para o aumento ou a diminuição da curvatura produzida pela esfericidade terrestre. Em instrumental de baixa categoria o valor de σ pode atingir a valores apreciáveis, superiores ao de ν e mesmo de sentido contrário. Assim é que na D.H.N. quando eram usados no aeromultiplex reduções de fotogramas da câmara Zeiss 30x30 cm² a correção da distorção era tão deficiente que o modelo apresentava invariavelmente uma curvatura para cima, como mostra a Fig. 6.8, ao contrário da que apareceria em decorrência da curvatura da Terra. É claro que, no caso da aeropoligonação, tanto σ como ν estão incluídos no erro sistemático $\overline{d\varphi}$, concorrendo para a sua formação com o

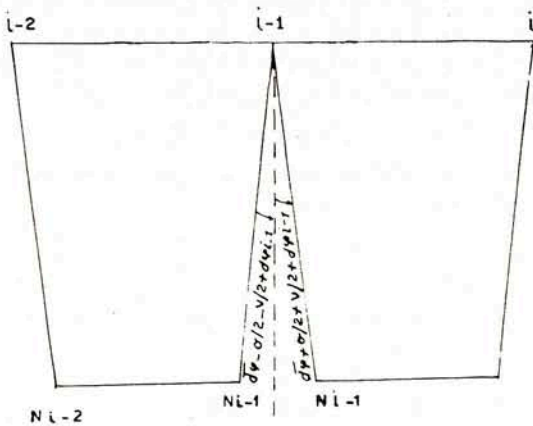


Fig. 7.4

sinal da soma algébrica $\sigma + \nu$. No caso do aeronivelamento, porém, onde o modelo é desenvolvido sobre o plano de projeção, a inclinação $\delta\varphi$ dada à câmara de ré ao mudar-se de par, pode ser justificada examinando a Fig. 7.4. Aí vemos os raios nadirais convergindo em cada par de um aeronivelamento. Se $\Delta\varphi_{i-1}$ e $\Delta\varphi'_{i-1}$ são os erros verdadeiros de inclinação da câmara $i-1$ nos pares $(i-2)$, $(i-1)$ e $(i-1),i$, respectivamente, deduziremos da Fig. 7.4

$$\Delta\varphi_{i-1} = \overline{d\varphi} - \sigma/2 - \nu/2 + d\varphi_{i-1}$$

$$\Delta\varphi'_{i-1} = \overline{d\varphi} + \sigma/2 + \nu/2 + d\varphi'_{i-1}$$

Se estivessemos efetuando uma aeropoligonação, os raios nadirais N_{i-1} e N'_{i-1} seriam trazidos à coincidência mediante uma rotação $-\Delta\varphi_{i-1}$ em $(i-1)N_{i-1}$ e outrora $\Delta\varphi'_{i-1}$ em $(i-1)N'_{i-1}$, consequentemente, a inclinação $\delta\varphi_{i-1}$ que damos à câmara $i-1$ para mudar de par é igual à diferença entre as expressões precedentes, isto é

$$\delta\varphi_{i-1} = \sigma + \nu + d\varphi'_{i-1} - d\varphi_{i-1}$$

ou, fazendo

$$\sigma + \nu = \overline{d\phi} \quad \text{e} \quad d\varphi'_{i-1} - d\varphi_{i-1} = d\phi_{i-1}$$

$$\delta\varphi_{i-1} = \overline{d\phi} + d\phi_{i-1} \quad (7.4f)$$

Aqui podemos tirar uma conclusão importante. Se somarmos as expressões cuja diferença conduziu a (7.4f), teremos eliminados os erros provenientes da curvatura da Terra e da distorção radial e é justamente essa soma que ocorre quando deduzimos (7.4d). Vemos, pois, que num aeronivelamento são automaticamente eliminados dois importantes erros sistemáticos. Há, porém, interesse em eliminar esses erros por outro caminho, na determinação da inclinação longitudinal ϕ em cada modelo, uma vez que esta é uma das variáveis que utilizaremos ao realizar a compensação da faixa.

Para a determinação dos valores de ϕ teremos de reduzir o aeronivelamento à aeropoligonação que lhe corresponde. Se (7.4f) representa a diferença de inclinação longitudinal entre dois modelos consecutivos nessa aeropoligonação, podemos escrever

$$\phi_{(i-1),i} = \phi_{(i-2),(i-1)} + \delta\varphi_{i-1} \quad (7.4g)$$

que, sendo uma expressão de recorrência, poderá ser tratada como as anteriores, conduzindo à expressão

$$\phi_{(i-1),i} = \phi_{12} + \sum_2^{i-1} \delta\varphi$$

Se no último par determinarmos, em função dos pontos de apóio, o valor de ϕ , teremos um erro de fechamento

$$-W = \phi_{(n-1),n} - \phi_{12} - \sum_2^{i-1} \delta\varphi$$

sendo ϕ_{12} a inclinação no primeiro par, também determinada em função do apóio terrestre. Então, de acordo com (7.4f),

$$-W = \phi_{(n-1),n} - \phi_{12} - (n-2)\overline{d\phi} - \sum_2^{i-1} d\phi$$

e, abandonando a soma simples dos erros acidentais, podemos calcular o valor de $\overline{d\phi}$ que anula o erro de fechamento $-W$ na expressão acima e que será

$$\overline{d\phi} = W/(n-2)$$

ou, de acordo com (7.4g)

$$\overline{d\phi} = \frac{\phi_{(n-1),n} - \phi_{12} - \sum_2^{i-1} \delta\varphi}{n-2} \quad C_2 \quad (7.4h)$$

Cabe aqui uma importante conclusão: a técnica instrumental no aeronivelamento elimina a acumulação dupla de erros acidentais no parâmetro φ e, assim, poderemos efetuar uma compensação bem mais eficiente dos erros em ϕ . Para isso haverá, no entanto, necessidade de obter com rigor os valores das inclinações $\delta\varphi$.

Quanto às inclinações transversais Ω as fórmulas (7.2y) e (7.2z) permanecem válidas.

7.5 — Aerocaminhamento

Conforme vimos em (6.3) a técnica instrumental do aerocaminhamento é exatamente a mesma da relativa ao aeronivelamento. Aqui, porém, todos os modelos apresentam inclinações longitudinais ϕ que resultam da manutenção de $bz=0$ (Fig. 7.5), exceto no par I-II, onde o nivelamento é efetuado introduzindo bz na câmara I. Então, a planimetria seria obtida rebatendo sucessivamente os pla-

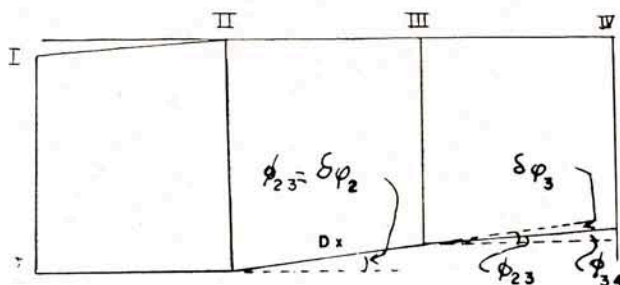


FIG. 7.5

nos de todos os modelos sobre planos horizontais, tendo como charneiras os eixos 2Y, 3Y, etc., perpendiculares ao plano do papel. A determinação dos ângulos ϕ far-se-á, evidentemente, empregando a fórmula (7.4f) deduzida para o aeronivelamento. Apenas aqui os valores de $\delta\phi$ são muito mais fortes porquanto dependem dos valores reais de bz que são sempre conservados nulos. Os erros sistemáticos e acidentais que ocorrem no aerocaminhamento são também os mesmos que aparecem no aeronivelamento, sendo válidas todas as fórmulas que representam os erros planimétricos às quais devemos acrescentar a que representa o rebatimento dos modelos sobre os planos horizontais (Fig. 7.5) a ser levado em conta antes de aplicar as fórmulas de propagação.

Embora as inclinações longitudinais geralmente não afetem as abscissas x , pois nos vôos fotogramétricos sempre temos valores de bz muito limitados, vamos deduzir as correções a aplicar a x . Designando por Dx' a diferença entre as abscissas de dois pontos nadirais consecutivos, a Fig. 7.5 nos mostra que

$$Dx = Dx' / \cos \phi$$

ou, como ϕ é sempre pequeno,

$$Dx = Dx' / (1 - \phi^2/2)$$

ou, praticamente

$$Dx = Dx' (1 + \phi^2/2)$$

e a correção a aplicar a Dx' será

$$\Delta x = Dx' \frac{\phi^2}{2}$$

Esta correção, de um modo geral desprezível, pode ser tirada do ábaco da Fig. 7.6 onde Dx' é a diferença entre a abscissa de qualquer ponto do modelo e a abscissa do ponto nadiral de ré. Tal correção deverá ser introduzida em todas as abscissas antes de efetuar o transporte, o que impede a totalização das abscissas durante a concatenação. Felizmente, como já dissemos, é muito raro que se torne necessária esta correção.

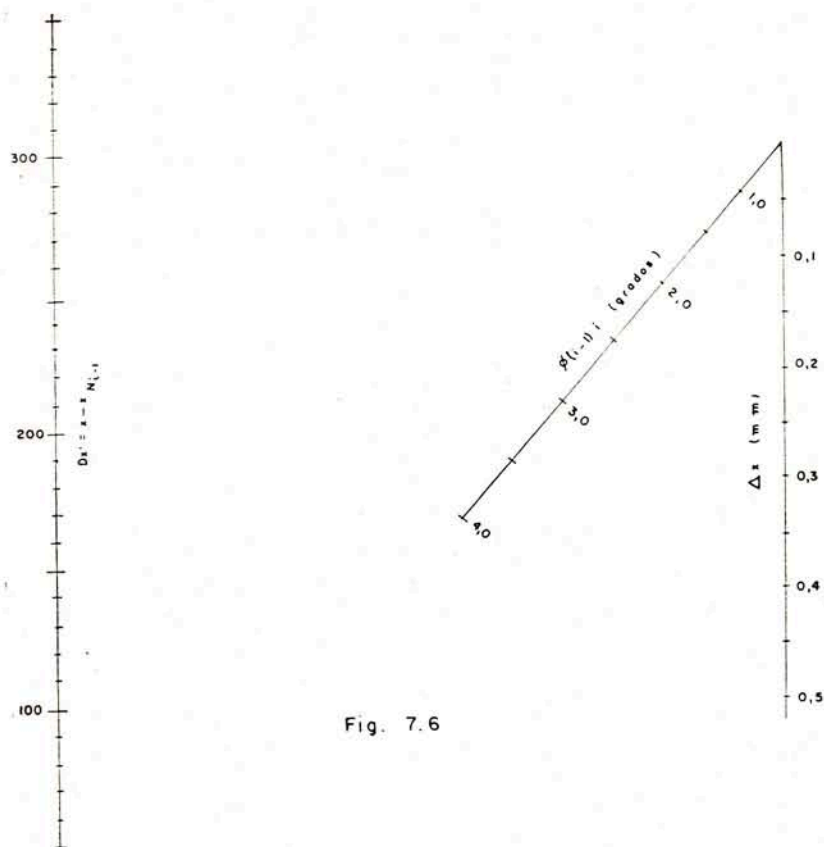


Fig. 7.6

Para poder aplicar à altimetria correções em forma de polinômio, seria necessário reduzir o aerocaminhamento a uma aeropoligonação, como faz Van Der Weele. Embora isto não ofereça dificuldade, não mostraremos como se realiza a redução porque no método que empregaremos ela é completamente desnecessária.

7.6 — Aerocaminhamento a base constante

Conforme mostramos ao explicarmos as operações instrumentais, uma vez corrigidas as abcissas dos valores fornecidos por (6.3a) o problema reduz-se a um aerocaminhamento a *azimute constante*. Conforme mostra a Fig. 6.11 o azimute de um par qualquer pode ser obtido em função do par anterior pela expressão

$$A_{(i-1),i} = A_{(i-2),(i-1)} + \theta_1 \quad (7.6a)$$

não levando em conta os erros sistemáticos e acidentais. Como neste método a orientação relativa de cada par é efetuada de tal forma que

os parâmetros κ e φ são determinados independentemente dos do par anterior, não haverá, em ambos os parâmetros, acumulação dupla de erros acidentais e o que foi dito sobre $\delta\varphi$ no aeronivelamento, pode ser repetido para θ no método de que estamos tratando. Assim sendo, concluímos que é possível deduzir uma expressão idêntica a (7.4h) para exprimir o erro sistemático de azimute, que será dado por

$$\overline{dA} = \frac{A_{(n-1),n} - A_{12} - \sum_2^{i-1} \theta}{n-2} \quad (7.6b)$$

Não procuraremos, também aqui, exprimir os erros em forma de polinômios, porquanto o método geral de compensação é capaz de ser aplicado a todos os métodos de aerotriangulação.

7.7 — Aerotriangulação com câmaras convergentes

Neste tipo de aerotriangulação temos dois casos a considerar: o dos pares estereoscópicos e o dos pares de transporte. Vamos iniciar nosso estudo abordando o problema do transporte. Para efetuar-lo, a orientação da câmara A_i em relação à B_i deverá ser realizada ajustando apenas os parâmetros angulares, uma vez que a simultaneidade das fotos tomadas do mesmo ponto está condicionada a

$$bx = by = bz = 0$$

Consequentemente, se $\Delta\gamma_{Bi}$, $\Delta\alpha_{Bi}$ e $\Delta\beta_{Bi}$ são os erros nos parâmetros de orientação de B_i no par estereoscópico $A_{i-1}B_i$, teremos, da mesma forma que obtivemos as três primeiras expressões do grupo (7.2b), os erros de A_i em função dos de B_i expressos por

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_{Ai} &= \Delta\gamma_{Bi} + \overline{d\gamma'} + d\gamma'_{Ai} \\ \Delta\alpha_{Ai} &= \Delta\alpha_{Bi} + \overline{d\alpha'} + d\alpha'_{Ai} \\ \Delta\beta_{Ai} &= \Delta\beta_{Bi} + \overline{d\beta'} + d\beta'_{Ai} \end{aligned} \quad (7.6a)$$

Mas no par estereoscópico, os erros verdadeiros de B_i em relação aos de A_{i-1} podem ser expressos por

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_{Bi} &= \Delta\gamma_{Ai-1} + \overline{d\gamma''} + d\gamma'_{Bi} \\ \Delta\alpha_{Bi} &= \Delta\alpha_{Ai-1} + \overline{d\alpha''} + d\alpha'_{Bi} \\ \Delta\beta_{Bi} &= \Delta\beta_{Ai-1} + \overline{d\beta''} + d\beta'_{Bi} \end{aligned}$$

Então, se substituirmos estes valores em (7.6a) e fizermos

$$\begin{aligned} \overline{d\gamma'} + \overline{d\gamma''} &= \overline{d\gamma} & d\gamma'_{Ai} + d\gamma'_{Bi} &= d\gamma_{Ai} \\ \overline{d\alpha'} + \overline{d\alpha''} &= \overline{d\alpha} & d\alpha'_{Ai} + d\alpha'_{Bi} &= d\alpha_{Ai} \\ \overline{d\beta'} + \overline{d\beta''} &= \overline{d\beta} & d\beta'_{Ai} + d\beta'_{Bi} &= d\beta_{Ai} \end{aligned}$$

teremos

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_{Ai} &= \Delta\gamma_{Ai-1} + \overline{d\gamma} + d\gamma_i \\ \Delta\alpha_{Ai} &= \Delta\alpha_{Ai-1} + \overline{d\alpha} + d\alpha_i \\ \Delta\beta_{Ai} &= \Delta\beta_{Ai-1} + \overline{d\beta} + d\beta_i \end{aligned}$$

que são expressões absolutamente análogas às três primeiras do grupo (7.2b). As duas últimas, que resultam das anteriores, são também análogas. Assim concluímos que na aeropoligonação com câmaras convergentes os erros se propagam obedecendo às mesmas leis que deduzimos para o caso das câmaras verticais. Seguindo a mesma marcha, chegaríamos a conclusões análogas para os demais métodos da aerotriangulação.

Embora não tenhamos experiência alguma com aerotriangulação com câmaras convergentes, parece-nos incontestável o aumento da precisão altimétrica, pois mesmo com câmaras normais, a relação b/z é superior à que se obtém com as câmaras grande-angulares verticais com $f=150$ mm e 24×24 cm².

7.7 — Correções inerentes ao aeromultiplex

Como nos próximos capítulos trataremos da compensação das aerotriangulações efetuadas em aparelhos de primeira ordem, julgamos caber melhor aqui o estudo das correções inerentes ao aeromultiplex.

Conforme vimos no Capítulo VI (6.2), sempre previmos uma ajustagem muito rudimentar da planimetria, distribuindo linearmente o erro em distância pelos projetores e girando a folha para a correção do azimute. Ora, uma vez que as leis de propagação dos erros são as mesmas para os aparelhos de primeira ordem ou o multiplex, a técnica preconizada para a utilização deste instrumento não permitirá eliminar completamente os erros planimétricos. Ajustando as extremidades da faixa restarão pequenos resíduos no centro da mesma que podem ser bastante reduzidos com uma translação adequada da folha. Esta técnica parece-nos suficientemente satisfatória no que diz respeito à distribuição dos erros planimétricos. No entanto o mesmo não sucede à altimetria onde se fazem necessárias correções consideravelmente grandes.

Como no aeronivelamento a simples inclinação geral da barra é suficiente para corrigir toda a altimetria, resta estudar as correções inerentes à aeropoligonação e ao aerocaminhamento.

Quando tratamos das operações relativas à aeropoligonação mostramos que, uma vez terminada a orientação progressiva, era o modelo nivelado pelos pontos de apoio situados nos extremos da faixa que passaria a apresentar, no centro, uma forte diferença de nível em relação às extremidades (Fig. 6.7). Designando por D a distância AC e supondo B a meio caminho entre A e C , isto é, $AB = D/2$, se tomarmos A como origem das abscissas, os erros Δz , contados a partir de B serão expressos, de acordo com (7.2s) por

$$\Delta z = c_1(x - D/2) + c_2(x - D/2)^2$$

Mas esta fórmula pode ser simplificada. De fato se recordarmos que o termo do primeiro grau decorre do resíduo de inclinação do

primeiro par, que é aqui o par central, poderemos considerar esse resíduo nulo depois que nivelamos longitudinalmente a barra pelos pontos altimétricos situados nas extremidades. Assim sendo, teremos

$$\Delta z = c_2(x - D/2)^2 \quad (7.7a)$$

Então, o desnivelamento entre C ($x=D$) e B será dado por

$$\Delta z_C = c_2 D^2/4$$

e entre B e o ponto de apoio Q, será

$$\Delta z_Q = c_2(x - D/2)^2$$

A diferença entre estas duas expressões fornece o erro altimétrico de C para Q:

$$\Delta z' = -c_2 x(D - x) \quad (7.7b)$$

Então, se conhecemos a verdadeira diferença de nível entre os pontos C e Q, reduzida à escala do modelo, e medirmos neste essa diferença, a diferença entre as diferenças de nível será o erro $\Delta z'$; logo, se na folha de desenho medirmos x e D , poderemos calcular c_2 , tirando seu valor de (7.7b):

$$c_2 = -\Delta z'/x(D - x) \quad (7.7c)$$

Se desejássemos corrigir diretamente os pontos restituídos, bastaria introduzir x em (7.7a) e calcular as correções, mas, como desejamos conhecer os valores exatos de bz , é preferível outro caminho, que exige o conhecimento das inclinações ϕ de todos os pares. Examinando a Fig. 6.7 verificamos que é possível considerar ϕ como o ângulo formado pela tangente à curva com o eixo dos x . Consequentemente, como Δz são as ordenadas da curva, $\tan \phi$, praticamente igual a ϕ , será dado pela derivada de Δz em relação a x , então, derivando a expressão (7.7a), obtemos

$$\phi = c_2(2x - D)$$

Fazendo nesta expressão $x=0$ teremos a inclinação ϕ_{12} do primeiro par e fazendo $x=D$ teremos a do último $\phi_{(n-1),n}$, o que nos fornece:

$$\phi_{12} = -\phi_{(n-1),n} = c_2 D$$

ou, de acordo com (7.7c)

$$\phi_{12} = -\phi_{(n-1),n} = -\Delta z'/x(D-x) \quad (7.7d)$$

Ora, a diferença entre as inclinações extremas, evidentemente igual a $-2\phi_{12}$ é igual ao acúmulo do erro de convergência $\overline{d\phi}$ em $(n-2)$ pares, logo, podemos escrever

$$\overline{d\phi} = -2\phi_{12}/(n-2) \quad (7.7e)$$

De posse de $\overline{d\phi}$ podemos calcular sucessivamente tôdas as inclinações usando a expressão (7.2g). Resta, pois, calcular as variações dbz que correspondem às inclinações ϕ . Não é difícil compreender que dbz é a correção a introduzir em bz para podermos nivelar o modelo inclinado de ϕ . Assim sendo, podemos aplicar a expressão conhecida

$$dbz = bx \phi \quad (7.7f)$$

com a qual podemos determinar todos os valores de dbz e, em seguida calcular os valores finais de Δbz a serem algebricamente adicionados às leituras bz :

$$\Delta bz_i = \Delta bz_{i-1} + dbz_i \quad (7.7g)$$

Estamos, assim, de posse de tôdas as fórmulas necessárias à determinação de bz e vamos, a seguir, exemplificar seu emprego numa aerotriangulação, realizada no grande aeromultiplex da DHN, de uma faixa de vôo efetuada na costa de Santa Catarina:

$$\begin{aligned} D &= 1660 \text{ mm} & \phi_{12} &= -\Delta z'D/x(D-x) = -0,0120 \\ x &= 830 \text{ mm (D/2)} \\ \Delta z' &= 5 \text{ mm; } n = 16 & \overline{d\phi} &= -2\phi_{12}/(n-2) = 0,0017 \end{aligned}$$

Proj.	x	bx	ϕ	dbz	bz	bz'	bz
1	611,5			0,0		41,9	41,9
2	717,2	105,7	-0,0120	-1,3	-1,3	43,8	42,5
3	838,4	121,2	-0,0103	-1,2	-2,5	45,2	42,7
4	947,8	109,4	-0,0086	-0,9	-3,4	44,2	40,8
5	1054,8	107,0	-0,0069	-0,7	-4,1	45,8	41,7
6	1159,8	105,0	-0,0052	-0,6	-4,7	45,0	40,3
7	1263,7	103,9	-0,0035	-0,4	-5,1	45,8	40,7
8	1369,0	105,3	-0,0018	-0,2	-5,3	46,8	41,5
9	1483,0	114,0	-0,0001	0,0	-5,3	45,2	39,9
10	1596,8	113,8	0,0016	0,2	-5,1	47,5	42,4
11	1709,4	112,6	0,0033	0,4	-4,7	44,2	39,5
12	1824,0	114,6	0,0050	0,5	-4,2	43,0	38,8
13	1941,4	117,4	0,0067	0,7	-3,5	41,2	37,7
14	2056,3	114,9	0,0084	0,9	-2,6	40,5	37,9
15	2163,0	106,7	0,0101	1,1	-1,5	37,8	36,3
16	2270,2	107,2	0,0118	1,3	-0,2	37,8	37,6

De posse das leituras corretas de bz , introduzimo-las no aparelho e, ao fazê-lo, surgirão paralaxes transversais em todos os pares. Então, restaura-se a orientação relativa do primeiro par movendo o projetor 2 em ϕ e o 1 em ϕ e bx , devendo o valor dêste ser o que permite a manutenção da escala. Refeita, assim, a orientação, restitui-se a altimetria do par. Feito isso prossegue-se com a reorientação e restituição altimétrica de todos os pares, exatamente como no aeroni-velamento.

Estudemos agora as correções altimétricas do aerocaminhamen-to. Da mesma forma que na aeropoligonação, o trabalho resume-se

no cálculo dos valores de bz . Convém observar que para que êsse cálculo seja mais rigoroso será necessário que, juntamente com as observações de Δz (§ 6.2) sejam também anotados os valores de x lidos na barra *antes* de levar o projetor de vante ao nível do de ré ($bz=0$).

Embora, como já dissemos, o método não tenha sido, até o presente, empregado na prática, foi-nos possível, partindo dos elementos da aeropoligonação que acabamos de calcular, determinar os que deveriam figurar num aerocaminhamento da mesma faixa, caso conservassemos todos os projetores à mesma altura. Para maior facilidade, deixamos também o primeiro par com um resíduo de nivelamento, com o qual seus projetores ficariam à mesma altura. O exemplo de cálculo que se segue mostra claramente que as leituras finais de bz são obtidas com a mesma facilidade que na aeropoligonação:

$$\begin{aligned}\phi_{(-1),1} &= 0,0112 \\ \phi_{12} &= -0,0057 \\ \Sigma \delta \phi &= 0,0180 \quad (\text{da tab. que se segue}) \\ (n-2)\overline{d\phi} &= 0,0235 \quad \overline{d\phi} = 0,0017\end{aligned}$$

Proj.	x	bx	Δz	$\delta \phi' = \frac{\delta \phi}{\Delta z/bx}$	$\delta \phi = \delta \phi' + d\phi$	ϕ	dbz	bz
1	611,5							41,9
2	717,2	105,7				0,0057	0,6	42,5
3	838,4	121,2	-0,8	-0,0066	-0,0049	0,0008	0,1	42,6
4	947,8	109,4	-2,3	-0,0210	-0,0193	-0,0185	-2,0	40,6
5	1054,8	107,0	2,6	0,0243	0,0260	0,0075	0,8	41,4
6	1159,8	105,0	-2,4	-0,0229	-0,0212	-0,0135	-1,4	40,0
7	1263,7	103,9	1,6	0,0154	0,0171	0,0036	0,4	40,4
8	1369,0	105,3	0,2	0,0018	0,0035	0,0071	0,7	41,1
9	1483,0	114,0	-2,7	-0,0237	-0,0220	-0,0149	-1,7	39,4
10	1596,8	113,8	3,9	0,0342	0,0359	0,0210	2,4	41,8
11	1709,4	112,6	-5,6	-0,0497	-0,0480	-0,0270	-3,0	38,8
12	1824,0	114,6	2,2	0,0192	0,0209	-0,0061	-0,7	38,1
13	1941,4	117,4	-0,6	-0,0051	-0,0034	-0,0095	-1,1	37,0
14	2056,3	114,9	1,1	0,0096	0,0113	0,0018	0,2	37,2
15	2163,0	106,7	-2,0	-0,0187	-0,0170	-0,0152	-1,6	35,6
16	2270,2	107,2	2,7	0,0252	0,0269	0,0117	1,3	36,9

$$\begin{aligned}\text{Observ. } \phi_{i(i+1)} &= \phi_{i(i-1)i} + \delta \phi_i \\ bz_i &= bz_{i-1} + dbz\end{aligned}$$

Comparando os valores de bz com os fornecidos pelo cálculo precedente, notamos um pequeno desnivelamento que pode ser considerado como oriundo da própria aproximação do cálculo e, em particular, da medida de Δz . Tal resíduo pode ser facilmente corrigido com uma simples inclinação da barra.

Introduzidos os valores de bz , poderemos repetir aqui tudo quanto acabamos de dizer no caso da aeropoligonação.

Para terminar, desejamos chamar atenção para o fato de que a aplicação do aerocaminhamento no aeromultiplex afastará todos os inconvenientes que sobrevêm do encurvamento progressivo do modelo. No entanto, para obter bons resultados é necessário determinar com rigor as inclinações longitudinais inicial e final, para o que será necessário abundante apóio altimétrico nos pares extremos. cremos que 5 pontos altimétricos serão perfeitamente satisfatórios.

CAPÍTULO VIII

COMPENSAÇÃO DAS AEROTRIANGULAÇÕES

8.1 — As variáveis independentes

Conforme já dissemos no capítulo precedente, as variáveis sôbre as quais agiremos para a compensação de uma faixa simples de aerotriangulação são o azimuth A , o denominador da escala K e as inclinações longitudinal ϕ e transversal Ω . Embora não conservemos essas variáveis até o final, teremos que partir delas. Escrevamos suas expressões mais gerais:

$$A_{(i-1),i} = A_{(i-2),(i-1)} + \theta_i + \overline{dA} \quad (8.1a)$$

$$K_{(i-1),i} = K_{(i-2),(i-1)} + \overline{dK} \quad (8.1b)$$

$$\phi_{(i-1),i} = \phi_{(i-2),(i-1)} + \sum_2^{i-1} \delta\varphi + \overline{d\phi} \quad (8.1c)$$

$$\Omega_{(i-1),i} = \Omega_{(i-2),(i-1)} + \overline{d\Omega} \quad (8.1d)$$

A primeira delas é a (7.6a) onde acrescentamos o êrro $\overline{dA}$; a segunda é obtida subtraindo de (7.2w) a expressão que dela resulta quando fazemos $i=i-1$; a terceira é a (7.4f) com mais o êrro $\overline{d\phi}$ e a última é obtida subtraindo de (7.2y) a que daí resulta quando fazemos $i=i-1$.

Partindo do primeiro par, onde A , K , ϕ e Ω podem ser conhecidos através dos pontos de apôio, estas fórmulas permitem determinar êsses elementos, progressivamente, para todos os pares, desde que sejam conhecidos $\overline{dA}$, $\overline{dK}$, $\overline{d\phi}$ e $\overline{d\Omega}$; êstes, por sua vez, podem ser determinados se houver no último par apôio suficiente para determinar A , K , ϕ e Ω . As expressões que fornecem $\overline{dA}$, $\overline{dK}$, $\overline{d\phi}$ e $\overline{d\Omega}$ já foram antes deduzidas, mas a fim de tornar o desenvolvimento mais cômodo, vamos reproduzi-las com seu aspecto mais geral:

$$\overline{dA} = \frac{A_{(n-1),n} - A_{12} - \sum_2^{n-1} \theta}{n-2} \quad (8.1e)$$

$$\overline{dK} = \frac{K_{n-1,n} - K_{12}}{n - 2} \quad (8.1f)$$

$$\overline{d\phi} = \frac{\phi_{n-1,n} - \phi_{12} - \sum_2^{n-1} \delta\phi}{n - 2} \quad (8.1g)$$

$$\overline{d\Omega} = \frac{\Omega_{(n-1),n} - \Omega_{12}}{n - 2} \quad (8.1h)$$

A primeira destas fórmulas é a (7.6b), a segunda a (7.2x), a terceira a (7.4h) e a última a (7.2z). Desde logo podemos tirar uma conclusão importante. De fato, com o apóio nos pares extremos podemos determinar diretamente os valores de A, K, ϕ e Ω que lhes correspondem e

- a) determinar os valores de $\overline{dA}$, $\overline{dK}$, $\overline{d\phi}$ e $\overline{d\Omega}$ com (8.1e) a (8.1h);
- b) calcular progressivamente A, K, ϕ e Ω , livres de erros sistemáticos e de uma boa parte dos acidentais duplamente acumulados, usando as expressões (8.1a) a (8.1d).

Esta primeira distribuição de erros já nos faculta conhecer o dimensionamento (escala) de todos os pares e sua orientação no espaço; resta fixar-lhes as posições em relação a uma determinada origem, o que requer o estabelecimento das fórmulas gerais que permitem transformar as coordenadas-aparelho em coordenadas-terreno. A utilização dessas fórmulas onde figuram as variáveis A, K, ϕ e Ω possibilita estabelecer novas condições relativas aos erros de fechamento em coordenadas, facultando-nos realizar uma segunda compensação das variáveis.

Para que fique claro o processo de compensação, vamos lançar mão de um exemplo relativo à compensação dos erros em ϕ , numa aeropoligonação. No já citado trabalho de Bachmann intitulado "Théorie des Erreurs de l'Orientation Relative" encontramos (Tableau XII) os resultados de uma orientação relativa do mesmo par, realizada 25 vezes. Assim procedendo obteve o autor 25 valores diferentes dos parâmetros de orientação, cujas médias respectivas conduziram aos valores mais prováveis desses parâmetros e, consequentemente, aos resíduos das observações, também tabulados pelo autor. Ora, podemos admitir que cada orientação relativa corresponde a um par de uma aeropoligonação de 25 pares, onde haverá dupla acumulação dos erros de ϕ e de κ . Supondo que na determinação dos valores de ϕ seja sempre cometido um erro sistemático igual a -1° , poderemos somá-lo aos resíduos tabulados por Bachmann e organizar uma tabela como a que se segue, onde as três primeiras colunas são análogas às das tabelas 7.2-I e 7.2-II. As duas últimas colunas requerem, porém uma explicação especial. Se tirarmos de (7.2n)

TABELA 8.1-I

i	$\overline{d\varphi} + d\varphi$	$\Delta\varphi$	$\sum_2^i \Delta\varphi$	$2/(i-1)$	ϕ	par
2	- 1,2	- 1,2	- 1,2	2,000	- 2,4	2/3
3	- 2,1	- 3,3	- 4,5	1,000	- 4,5	3/4
4	- 7,5	-10,8	- 15,3	0,667	-10,2	4/5
5	- 6,4	-17,2	- 32,5	0,500	-16,3	5/6
6	1,3	-15,9	- 48,4	0,400	-19,4	6/7
7	- 1,8	-17,7	- 66,1	0,333	-22,0	7/8
8	- 3,0	-20,7	- 86,8	0,286	-24,8	8/9
9	-18,3	-39,0	-125,8	0,250	-31,5	9/10
10	- 8,0	-47,0	-172,8	0,222	-38,4	10/11
11	-10,5	-57,5	-230,3	0,200	-46,1	11/12
12	3,6	-53,9	-284,2	0,182	-51,7	12/13
13	8,2	-45,7	-329,9	0,167	-55,1	13/14
14	15,2	-30,5	-360,4	0,154	-55,5	14/15
15	- 1,4	-31,9	-392,3	0,143	-56,1	15/16
16	-11,2	-43,1	-435,4	0,133	-57,9	16/17
17	- 3,6	-46,7	-482,1	0,125	-60,3	17/18
18	- 6,8	-53,3	-535,6	0,118	-63,2	18/19
19	- 6,9	-60,4	-596,0	0,111	-66,2	19/20
20	5,0	-55,4	-651,4	0,105	-68,4	20/21
21	2,6	-52,8	-704,2	0,100	-70,4	21/22
22	- 7,5	-60,3	-764,5	0,095	-72,6	22/23
23	16,0	-44,3	-808,8	0,091	-73,6	23/24
24	9,5	-34,8	-843,6	0,087	-73,4	24/25

o valor de $\overline{d\phi}$ e o levamos a (7.2q), teremos

$$\phi_{(i-1),i} = \phi_{12} + \frac{2}{i-1} \sum_2^{i-1} \Delta\varphi$$

que nos permite calcular diretamente todas as inclinações ϕ que resultam do erro sistemático e da dupla acumulação dos erros acidentais, conforme vemos na última coluna da tabela. Se tomarmos um sistema de eixos coordenados em que o das abscissas represente os números dos pares e o das ordenadas os valores de ϕ que lhes correspondem, tirados da tabela 8.1-I, teremos uma série de pontos que ligados se dispõem segundo uma curva irregular, como vemos na Fig. 8.1. Supondo, para simplificar o raciocínio, que o par inicial estava perfeitamente nivelado, o apoio no último par nos forneceria, como mostra a tabela 8.1-I, $\phi = -73^{\circ},4$, o que nos daria, aplicando

(8.1g) para $\phi_{12} = \sum_2^{i-1} \Delta\varphi = 0$, $\overline{d\phi} = -3,19$. Então, todos os valores de ϕ calculados com (8.1c) para $\sum_2^{i-2} \Delta\varphi = 0$ estariam situados sobre

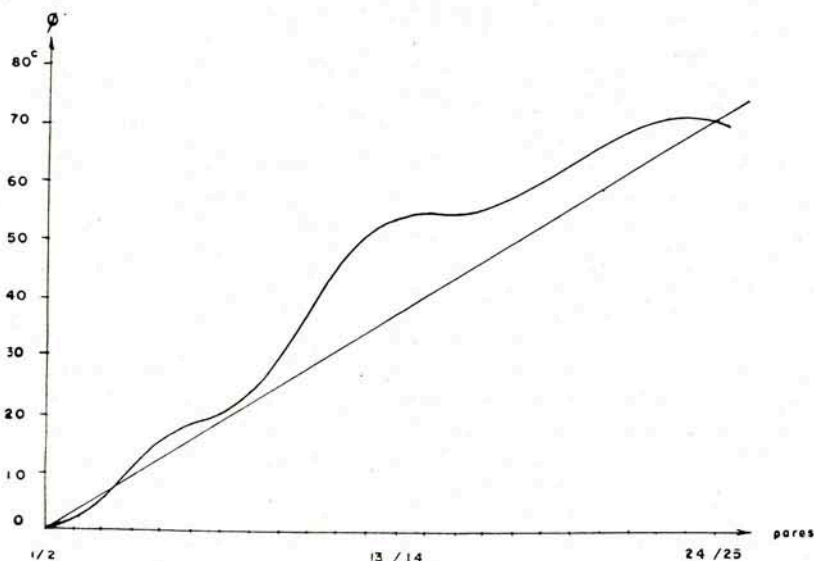


Fig. 8.1

a reta que une os valores extremos, restando ainda compensar as diferenças que vemos na Fig. 8.1 entre as ordenadas da curva e as da reta. Uma vez efetuada a primeira correção poderemos, mediante os valores de ϕ já determinados, calcular a altimetria, com as fórmulas que adiante deduziremos, e obter as cotas dos pontos no último par. Não fora as discrepâncias que vemos na Fig. 8.1 e teríamos coincidência entre as cotas transportadas e as determinadas no último par, mas como os erros afetarão fatalmente os transportes, surgirá um erro de fechamento que permitirá justamente distribuir correções aos valores intermediários de ϕ que anulem o referido erro. Em tais circunstâncias, a reta representada na Fig. 8.1 será substituída por uma curva tal que a soma dos quadrados dos afastamentos $d\phi$, entre ela e a curva irregular, seja um "minimum". Tal substituição importa em transformar a expressão linear de $d\phi$ noutra do segundo grau e isto acarretaria o aparecimento de um termo do terceiro grau na última expressão do grupo (7.3b).

Um raciocínio análogo nos permitiria tirar conclusões semelhantes em relação aos erros de A e K e, assim, deveríamos, de fato contar com o aparecimento de termos do terceiro grau nas outras expressões do grupo (7.3b), confirmando as conclusões de Van Der Weele.

Do estudo feito, concluímos que a simples distribuição linear dos erros de ϕ e, análogamente, dos de A e K , já reduz consideravelmente seu efeito, como mostra a Fig. 8.1, mas não o suficiente quando se trata de trabalhos de precisão. Outra conclusão interessante relaciona-se à importância que tem o rigor da orientação relativa, exclusiva responsável pela grandeza dos afastamentos entre a reta e a curva, uma vez que são apenas os erros acidentais os responsáveis por tais afastamentos. A redução destes a limites convenientes, só pode ser conseguida efetuando a orientação relativa por um dos processos estudados nos capítulos anteriores. Só assim conseguiremos evitar certas descontinuidades que antes não tinham explicação.

8.2 — Fórmulas para a transformação de coordenadas

Para maior simplicidade separemos a planimetria da altimetria e designemos por x e y as coordenadas de um ponto qualquer medidas no aparelho. Se K

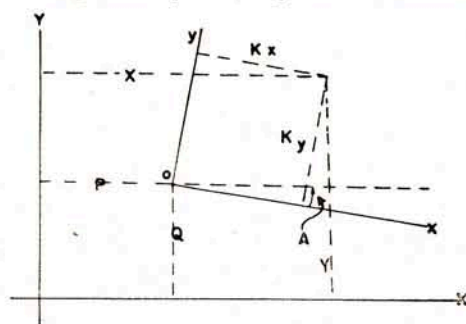


Fig. 8.2

é o denominador da escala do par, teremos em dimensões naturais, Kx e Ky . Se X e Y são as coordenadas terreno do ponto considerado e se a Fig. 8.2 representa a situação dos eixos do aparelho em relação ao sistema que define os pontos do terreno, deduziremos da Fig. 8.2 as seguintes fórmulas para a transformação das coordenadas:

$$\begin{aligned} X &= P + Kx \cos A + Ky \sin A \\ Y &= Q - Kx \sin A + Ky \cos A \end{aligned} \quad (8.2a)$$

Para maior simplicidade podemos fazer

$$\begin{aligned} K \cos A &= e \\ K \sin A &= f \end{aligned} \quad (8.2b)$$

e, assim, as expressões (8.2a) tomarão o aspecto

$$\begin{aligned} X &= P + ex + fy \\ Y &= Q + ey - fx \end{aligned} \quad (8.2c)$$

Para deduzirmos a fórmula relativa à altimetria, examinemos a Fig. 8.3. Aí xOy é o plano de referência das cotas instrumentais; π um plano horizontal passando pela origem; R a cota dessa origem acima do nível do mar; x , y e z as coordenadas instrumentais de um ponto qualquer e ϕ e Ω as componentes longitudinal e transversal, respectivamente, da inclinação do plano de referência do ins-

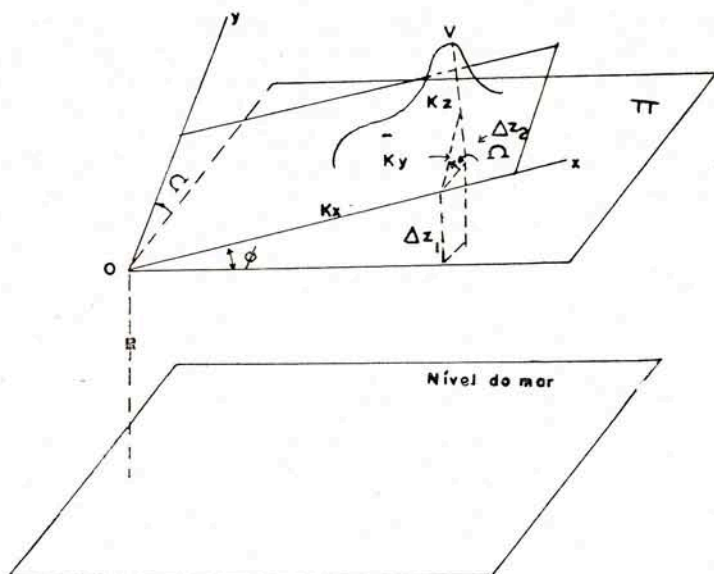


Fig. 8.3

trumento em relação ao horizonte. Reduzindo tôdas as leituras às dimensões naturais, isto é, multiplicando x , y e z por K , teremos a posição de V definida no sistema do aparelho. A Fig. 8.3 nos mostra ainda, que a cota verdadeira de V será dada, com rigor suficiente por

$$Z = R + Kz + Kx \operatorname{tg} \phi + Ky \operatorname{tg} \Omega$$

ou, fazendo

$$K \operatorname{tg} \phi = E$$

$$K \operatorname{tg} \Omega = F \quad (8.2d)$$

$$Z = R + Kz + Ex + Fy \quad (8.2e)$$

Como as inclinações do modelo são normalmente pequenas, a precisão não será prejudicada se substituirmos $\operatorname{tg} \phi$ e $\operatorname{tg} \Omega$ pelos respectivos arcos e , assim, (8.2d) tomará a forma

$$E = K\phi$$

$$F = K\Omega \quad (8.2f)$$

Uma vez que e , f , E e F são funções das variáveis independentes, seu conhecimento permitirá, como já dissemos, orientar o par no espaço, mas, para situá-lo, será necessário determinar as coordenadas P , Q e R da origem instrumental.

8.3 — Determinação rigorosa da orientação e da situação dos pares extremos

Devido às pequenas inclinações dos modelos, a planimetria e a altimetria podem ser tratadas separadamente, o que simplifica con-

QUADRO 8.3-I

Pontos	x	y	$x' = x - x_g$	$y' = y - y_g$	X	Y	$X' = X - X_g$	$Y' = Y - Y_g$
PFP 26	1.914,00	— 823,00	— 1.105,25	+ 2.631,92	65.963,55	211.619,27	+ 1.859,34	— 1.325,95
PFP 29	2.181,00	— 6.146,10	— 838,25	— 2.691,18	63.541,06	215.128,89	— 563,15	+ 2.183,67
PFP 30	3.850,80	— 5.323,30	+ 831,55	— 1.868,38	62.752,88	213.866,19	— 1.351,33	+ 920,97
PFP 25	4.131,20	— 1.527,30	+ 1.111,95	+ 1.927,62	64.159,35	211.166,56	+ 55,14	— 1.778,66
Somas	12.077,00	—13.819,70	0	— 0,02	256.416,84	851.780,91	0	+ 0,03
Médias	3.019,25	— 3.454,92	$\rightarrow (x_g, y_g)$	Médias	64.104,21	212.945,23	$\rightarrow (X_g, Y_g)$	

$$\begin{aligned}
 S_1 &= [x'x'] + [y'y'] = 25.228.164,1976 & e &= S_2/S_1 = -0,680237 & K^2 &= e^2 + f^2 = 0,63983373 \\
 S_2 &= [x'X'] + [y'Y'] = -17.161.106,4584 & f &= S_3/S_1 = +0,420846 & K &= 0,79989607 \\
 S_3 &= -[x'Y'] + [y'X'] = +10.617.162,5855 & tgA &= S_3/S_2 = 0,618675 & A &= 148^\circ 15' 22'' \\
 X_g &= 64.104,21 & Y_g &= 212.945,22 & \text{Verificação:} & \\
 -ex_g &= + 2.053,80 & -ey_g &= - 2.350,16 & X_o &= P + ex + fy \\
 -fy_g &= + 1.453,99 & fx_g &= + 1.270,64 & Y_o &= Q + ey - fx \\
 & & & & [v]_x &= [v]_y = 0 \\
 P &= 67.612,00 & Q &= 211.865,70 & &
 \end{aligned}$$

Pontos	ex	fy	X _o	v = X - X _o	ey	-fx	Y _o	v = Y - Y _o
PFP 26	-1.301,97	— 346,36	65.963,67	—0,12	+ 559,84	— 805,50	211.620,04	—0,77
PFP 29	-1.483,60	—2.586,56	63.541,84	—0,78	+4.180,80	— 917,86	215.128,64	+0,25
PFP 30	-2.619,46	—2.240,29	62.752,25	+0,63	+3.621,10	—1.620,59	213.866,21	—0,02
PFP 25	-2.810,19	— 642,76	64.159,05	+0,30	+1.038,93	—1.738,60	211.166,03	+0,53
				+0,03				—0,01

Pontos	X	Y	$x' = x - x_g$	$y' = y - y_g$	X	Y	$X' = X - X_g$	$Y' = Y - Y_g$
PFP 34	28.870,00	— 806,90	—938,49	+2.326,57	47.654,76	200.209,28	+1.628,73	—1.181,35
PFP 31	29.128,70	— 5.594,30	—679,70	—2.460,83	45.438,13	203.353,52	— 587,90	+1.962,89
PFP 33	30.764,10	— 5.169,80	+955,70	—2.036,33	44.509,43	202.366,04	—1.516,60	+ 975,41
PFP 35	30.470,80	— 962,90	+662,40	+2.170,57	46.501,83	199.633,68	+ 475,80	—1.756,95
Somas	119.233,60	—12.533,90	0	— 0,02	184.104,15	805.562,52	+ 0,03	0
Médias	29.808,40	— 3.133,47	$\rightarrow (x_g, y_g)$	Médias	46.026,03	201.396,63	$\rightarrow (X_g, Y_g)$	

$$\begin{aligned}
 S_1 &= [x'x'] + [y'y'] = +23.021.349,1476 & e &= -0,679445 & K^2 &= (e^2 + f^2) = 0,64338998 \\
 S_2 &= [x'X'] + [y'Y'] = -15.641.720,9770 & f &= +0,426315 & K &= 0,80211594 \\
 S_3 &= -[x'Y'] + [y'X'] = + 9.814.333,4331 & tgA &= 0,627445 & A &= 147^\circ 53' 38'' \\
 X_g &= 46.026,03 & Y_g &= 201.390,63 & \text{Verificação:} & \\
 -ex_g &= +20.253,32 & -ey_g &= - 2.129,02 & X_o &= P + ex + fy \\
 -fy_g &= + 1.335,85 & fx_g &= +12.707,77 & Y_o &= Q + ey - fx \\
 & & & & [v]_x &= [v]_y = 0 \\
 P &= 67.615,05 & Q &= +211.969,38 & &
 \end{aligned}$$

Pontos	ex	fy	X _o	v = X - X _o	ey	-fX	Y _o	v = Y - Y _o
	-19.615,58	— 343,99	47.655,98	—0,72	+ 548,24	—12.307,71	200.209,91	—0,63
	-19.791,35	—2.384,93	45.438,77	—0,64	+3.801,02	—12.418,00	203.352,40	+1,12
	-20.902,51	—2.203,96	44.508,58	+0,85	+3.512,59	—13.115,20	202.366,77	—0,73
	-20.703,23	— 410,50	46.501,32	+0,51	+ 654,23	—12.990,16	199.633,45	+0,23
				0,00				—0,01

$$\begin{aligned}([x'x'] + [y'y']) e &= [x'X'] + [y'Y'] \\([x'x'] + [y'y']) f &= -[x'Y'] + [y'X']\end{aligned}\tag{8.3e}$$

A resolução destas equações permite obter e e f e, para obter A e K , teremos das equações (8.2b)

$$\begin{aligned}A &= \arctg (f/e) \\K &= \sqrt{e^2 + f^2}\end{aligned}\tag{8.3f}$$

Quanto aos valores de P e Q , tira-los-emos de (8.3c) onde já conhecemos todos os elementos. Um exemplo da determinação de todos os elementos do par pode ser encontrado no quadro 8.3-I. Aí figuram também algumas operações adicionais, destinadas à verificação dos cálculos efetuados.

Passemos agora à determinação dos elementos da altimetria. Considerando, como no caso da planimetria, que existem pontos de apóio superabundantes, teremos de (8.2e)

$$\begin{aligned}Z_1 - Kz_1 &= R + Ex_1 + Fy_1 \\Z_2 - Kz_2 &= R + Ex_2 + Fy_2 \\&\vdots \\&\vdots\end{aligned}\tag{8.3g}$$

cuja soma é

$$[Z] - K[z] = nR + E[x] + F[y]$$

donde, dividindo por n (n° de pontos de apóio) e usando anotações idênticas às que vemos em (8.3c), teremos

$$Z_k - Kz_k = R + Ex_k + Fy_k\tag{8.3h}$$

onde, evidentemente,

$$Z_k = [Z]/n \quad e \quad z_k = [z]/n\tag{8.3i}$$

Subtraindo (8.3h) de tôdas as equações (8.3g) e usando anotações idênticas a (8.3d), às quais acrescentamos

$$\begin{aligned}Z - Z_k &= Z' \\z - z_k &= z'\end{aligned}\tag{8.3j}$$

teremos

$$\begin{aligned}Z'_1 - Kz'_1 &= Ex'_1 + Fy'_1 \\Z'_2 - Kz'_2 &= Ex'_2 + Fy'_2 \\&\vdots \\&\vdots\end{aligned}\tag{8.3k}$$

que são as equações de condição da altimetria. Delas passaremos às equações normais:

$$\begin{aligned}[x'x'] E + [x'y'] F &= [x'(Z' - Kz')] \\[x'y'] E + [y'y'] F &= [y'(Z' - Kz')]\end{aligned}\tag{8.3l}$$

QUADRO 8.3-II

Primeiro

$$K' = 0.999870 \text{ par}$$

Pontos	x	y	z	$x' = x - x_g$	$y' = y - y_g$	$z' = z - z_g$	Z	$Z' = Z - Z_g$	K'z'	Z'-K'z'
PFP 26	1.914,00	823,00	520,00	-1.105,25	+2.631,92	-4,20	520,01	-4,17	-4,20	+0,03
PFP 29	2.181,00	6.146,10	521,40	-838,25	-2.691,18	-2,80	521,36	-2,82	-2,80	-0,02
PFP 30	3.850,80	5.323,30	508,90	+831,55	-1.868,38	-15,30	508,90	-15,28	-15,29	+0,01
PFP 25	4.131,20	1.527,30	546,50	+1.111,95	+1.927,62	+22,30	546,46	+22,28	-22,29	-0,01
Somas	12.077,00	-13.819,70	2.096,80	0	-0,02	0	2.096,73	+0,01	0	+0,01
	3.019,25	-3.454,92	524,20	$\uparrow (x_g, y_g, z_g)$	$\uparrow$ Médias	$\uparrow$ Médias	524,18			

Verificação

Pontos	Ex	Fy	K'z	Z _e	v
				520,00	+0,01
				521,38	-0,02
				508,87	+0,03
				546,47	-0,01

$Z_e = R + Ex + Fy + K'x; \quad v = Z_e - Z_o; \quad [v] = 0$

$$K' = 1,002645$$

a	$[x'x']$	$= +3,852,148,8300$	a/b	$= -60,872740$	d/b	$= +0,000307$
b	$[x'y']$	$= -63,282,2750$	b/c	$= -0,002960$	$-k/c$	$= -0,000044$
c	$[y'y']$	$= +21,376,015,3676$				
d	$[x'z'] - K'z'$	$= -19,1965$	d/a	$= -0,000005$	d/a	$= -0,000005$
e	$[y'z'] - K'z'$	$= +0,8212$	$-c/b$	$= +337,895000$	$-k/b$	$= +0,001498$
f			Df	$= +337,893357$	Nf	$= +0,001493$
E	Ne/De	$= -0,000005$				
F	Nf/De	$= +0,000004$				
R	$Zg - K'zg - Exg - F'yg$	$= +0,14$				

Último par
K' — 1,002645

Pontos	x	y	z	$x' = x - x_g$	$y' = y - y_g$	$z' = z - z_g$	z	$Z' = Z - Z_g$	$K'_{z'}$	$Z' - K'_{z'}$
PFP 34	28.870,00	—	806,90	—938,40	+2.326,57	+15,30	767,56	+15,76	+15,34	+0,42
PFP 31	29.128,70	—	5.594,30	—679,70	—2.460,83	+1,60	751,63	—0,17	+1,60	+1,77
PFP 33	30.764,10	—	5.169,80	+955,70	—2.036,33	+3,30	754,38	+2,58	+3,31	—0,73
PFP 35	30.470,80	—	962,90	+662,40	+2.170,57	—20,20	733,66	—18,14	—20,25	+2,11
Somas	119.233,60	—12.533,47	3.074,80	0	—0,02	0	3.007,23	+0,03	0	+0,03
	29.808,40	—3.133,47	768,70	$\rightarrow (x_g, y_g, z_g)$	$\rightarrow$ Mdias $\rightarrow$	Z_g	751,80	—		

Verificação

Pontos	Ex	Fy	K'z	Z _e	v
				767.80	-0.24
				751.40	+0.23
				754.64	-0.26
				733.37	+0.29
					$\frac{2}{2}$

$Z_e = R + Ex + Fy + K'z; \quad v = Z - Z_e; \quad [v] = 0$

[illegible]

A solução dêste sistema, pelo método vulgar de eliminação, fornece E e F. O valor de R será tirado da expressão (8.3h), onde já serão conhecidos todos os elementos. O exemplo prático que vemos no quadro 8.3-II esclarece todas as operações.

8.4 — Cálculo progressivo de P, Q e R

Determinados os valores de P, Q, e e f para a planimetria e R, E e F para a altimetria, relativos ao primeiro par, vamos mostrar como é possível calcular êsses elementos progressivamente, para todos os pares.

Ao descrevermos a técnica da orientação progressiva mostramos que o transporte de um par para o seguinte consiste em igualar as três coordenadas no ponto nadiral comum a êsses pares. É claro, pois, que as coordenadas-terreno dêsse ponto nadiral deverão ser iguais, quer as calculemos com os elementos do par de ré ou com os do de vante. Consequentemente, deveremos ter as seguintes identidades:

$$N_2 \begin{cases} X_2 = P_{12} + e_{12}x_2 + f_{12}y_2 = P_{23} + e_{23}x_2 + f_{23}y_2 \\ Y_2 = Q_{12} + e_{12}y_2 - f_{12}x_2 = Q_{23} + e_{23}y_2 - f_{23}x_2 \\ Z_2 = R_{12} + K_{12}z_2 + E_{12}x_2 + F_{12}y_2 = R_{23} + K_{23}z_2 + E_{23}x_{23} + F_{23}y_{23} \end{cases}$$

$$N_3 \begin{cases} X_3 = P_{23} + e_{23}x_3 + f_{23}y_3 = P_{34} + e_{34}x_3 + f_{34}y_3 \\ Y_3 = Q_{23} + e_{23}y_3 - f_{23}x_3 = Q_{34} + e_{34}y_3 - f_{34}x_3 \\ Z_3 = R_{23} + K_{23}z_3 + E_{23}x_3 + F_{23}y_3 = R_{34} + K_{34}z_3 + E_{34}x_{34} + F_{34}y_{34} \end{cases}$$

.
.
.

Das identidades acima tiramos imediatamente:

$$\begin{aligned} P_{23} &= P_{12} - (e_{23} - e_{12})x_2 - (f_{23} - f_{12})y_2 \\ P_{34} &= P_{23} - (e_{34} - e_{23})x_3 - (f_{34} - f_{23})y_3 \end{aligned} \quad (8.4a)$$

.

$$\begin{aligned} Q_{23} &= Q_{12} - (e_{23} - e_{12})y_2 + (f_{23} - f_{12})x_2 \\ Q_{34} &= Q_{23} - (e_{34} - e_{23})y_3 + (f_{34} - f_{23})x_3 \end{aligned} \quad (8.4b)$$

.

$$\begin{aligned} R_{23} &= R_{12} - (K_{23} - K_{12})z_2 - (E_{23} - E_{12})x_2 - (F_{23} - F_{12})y_2 \\ R_{34} &= R_{23} - (K_{34} - K_{23})z_3 - (E_{34} - E_{23})x_3 - (F_{34} - F_{23})y_3 \end{aligned} \quad (8.4c)$$

.
.

Temos, assim, as fórmulas que permitem o cálculo progressivo de P , Q e R que introduzidos em (8.2c) e (8.2e), juntamente com e , f , E e F , possibilitam a transformação imediata das coordenadas-aparelho em coordenadas-terreno. Basta, para isso, que sejam previamente determinados os elementos do primeiro par da faixa e os valores sucessivos de e , f , E e F em função de A , K , ϕ e Ω . É claro que se houver apóio apenas no primeiro par da faixa somos forçados a admitir que e , f , E e F são constantes e não poderá haver nenhuma distribuição de erros ao longo da faixa. Também é possível apoiar alguns pares de uma longa faixa, no início desta, determinar aí os valores dos erros sistemáticos e extrapolar para o restante da faixa.

O lançamento de uma faixa com apóio apenas no seu início é o que se denomina na França *antena* e nos Estados Unidos *trampolim*.

8.5 — Cálculo e eliminação dos erros sistemáticos

Determinados os valores de A , K , ϕ e Ω para os pares extremos, os erros sistemáticos poderão ser calculados usando as fórmulas (8.1e) e os valores sucessivos daqueles mesmos elementos poderão ser conhecidos através das expressões (8.1a) a (8.1d). Com estes elementos podemos calcular todos os valores de e , f , E e F pelas fórmulas (8.2b) e (8.2f) e os de P , Q e R com (8.4a) a (8.4c). Caso os pontos de apóio nos pares extremos estejam referidos a dois sistemas diferentes, mas de eixos paralelos, o que é possível orientando-os com azimutes determinados astronomicamente, mas convenientemente reduzidos ao plano, teremos uma clara possibilidade de efetuar a ligação desses pares, e o resultado poderá ser considerado livre de erros sistemáticos. e da maior parte dos acidentais duplamente acumulados. Esta técnica não é porém aconselhável em trabalhos de precisão, uma vez que os erros acidentais podem ser responsáveis por diferenças inaceitáveis nas coordenadas e , particularmente, nas altitudes. Tais erros podem ser compensados, mas será imprescindível que os pontos de apóio situados nos pares extremos estejam definidos no mesmo sistema de coordenadas-terreno. Se tal acontecer, teremos possibilidade de determinar para os pares extremos os valores de P , Q e R , diretamente e, assim procedendo, veremos que se partirmos de P_{12} , Q_{12} e R_{12} os valores transportados para o último par diferirão dos que aí foram determinados diretamente, aparecendo, assim, um erro de fechamento. Tal erro, que deverá ser compensado, resulta da propagação sobre P , Q e R dos erros acidentais de A , K , ϕ e Ω . A seguir trataremos dessa compensação.

8.6 — Compensação dos erros acidentais

No que diz respeito à compensação dos erros planimétricos, da qual trataremos em primeiro lugar, teremos que anular os erros de fechamento em P e Q , resultantes da propagação dos erros acidentais de A e K . Embora seja possível agir diretamente sobre estas variáveis, conseguiremos uma notável simplificação se compensarmos di-

retamente os erros de e e f , que também serão de natureza nítidamente acidental, uma vez que e e f são funções apenas de A e K .(*) Para chegarmos a essa solução façamos inicialmente

$$\begin{aligned} e_{i,(i+1)} - e_{(i-1),i} &= \Delta e_i \\ f_{i,(i+1)} - f_{(i-1),i} &= \Delta f_i \end{aligned} \quad (8.6a)$$

e escrevamos (8.4a) e (8.4b) com as formas

$$\begin{aligned} P_{23} &= P_{12} - \Delta e_2 x_2 - \Delta f_2 y_2 \\ P_{34} &= P_{23} - \Delta e_3 x_3 - \Delta f_3 y_3 \end{aligned} \quad (8.6b)$$

$$\begin{aligned} &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{23} &= Q_{12} - \Delta e_2 y_2 + \Delta f_2 x_2 \\ Q_{34} &= Q_{23} - \Delta e_3 y_3 + \Delta f_3 x_3 \end{aligned} \quad (8.6c)$$

$$\begin{aligned} &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Como não nos interessam os valores intermediários de P e Q , antes da compensação, há toda a conveniência em obter $P_{(n-1),n}$ e $Q_{(n-1),n}$ diretamente. Para isto basta somar membro a membro as expressões (8.6b) e (8.6c) e reduzir os termos semelhantes:

$$\begin{aligned} P_{(n-1),n} &= P_{12} - [\Delta e \ x] - [\Delta f \ y] \\ Q_{(n-1),n} &= Q_{12} - [\Delta e \ y] + [\Delta f \ x] \end{aligned} \quad (8.6d)$$

Se os valores de A e K estão afetados de erros acidentais, o mesmo acontecerá, como já foi dito, aos de e e f e, evidentemente, também aos de Δe e Δf , logo, os valores transportados de $P_{(n-1),n}$ e $Q_{(n-1),n}$ fornecidos por (8.6d) não coincidirão com os determinados em função dos pontos de apóio no último par. Consequentemente, se substituirmos em (8.6d) os valores de $P_{(n-1),n}$ e $Q_{(n-1),n}$ determinados diretamente, aparecerão os erros de fechamento expressos por

$$\begin{aligned} P_{(n-1),n} - P_{12} + [\Delta e \ x] + [\Delta f \ y] &= w_p \\ Q_{(n-1),n} - Q_{12} + [\Delta e \ y] - [\Delta f \ x] &= w_q \end{aligned} \quad (8.6e)$$

Vamos agora exprimir êstes erros de fechamento em função dos erros acidentais de Δe e Δf . Exprimindo por de e df os erros acidentais de e e f e por $d\Delta e$ e $d\Delta f$ os de Δe e Δf , teremos de (8.6a):

$$\begin{aligned} de_{23} - de_{12} &= d\Delta e_2 & df_{23} - df_{12} &= d\Delta f_2 \\ de_{34} - de_{23} &= d\Delta e_3 & df_{34} - df_{23} &= d\Delta f_3 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

A soma de tôdas estas expressões de $i=2$ a $i=n$, fornece:

$$\begin{aligned} de_{(n-1),n} - de_{12} &= [d\Delta e] \\ df_{(n-1),n} - df_{12} &= [d\Delta f] \end{aligned}$$

* No § 8.8 encontra-se completamente justificada a mudança de variáveis.

e, como nos pares extremos os valores de e e f são determinados em função do apoio terrestre, podemos considerar que os erros residuais são nulos e, assim,

$$[d\Delta e] = 0 \quad (8.6f)$$

$$[d\Delta f] = 0 \quad (8.6g)$$

Se aplicarmos a Δe e Δf , em (8.6e) as correções apropriadas $d\Delta e$ e $d\Delta f$, teremos a anulação de w_p e w_q , o que se exprime por

$$P_{(n-1),n} - P_{12} + [(\Delta e + d\Delta e)x] + [(\Delta f + d\Delta f)y] = 0$$

$$Q_{(n-1),n} - Q_{12} + [(\Delta e + d\Delta e)y] - [(\Delta f + d\Delta f)x] = 0$$

donde

$$P_{(n-1),n} - P_{12} + [\Delta e \ x] + [\Delta f \ y] + [d\Delta e \ x] + [d\Delta f \ y] = 0$$

$$Q_{(n-1),n} - Q_{12} + [\Delta e \ y] - [\Delta f \ x] + [d\Delta e \ y] - [d\Delta f \ x] = 0$$

consequentemente, de acordo com (8.6e),

$$[d\Delta e \ x] + [d\Delta f \ y] = -w_p$$

$$[d\Delta e \ y] - [d\Delta f \ x] = -w_q \quad (8.6h)$$

Então, (8.6f), (8.6g) e (8.6h) são as equações de condição do problema. Para maior facilidade escrevamo-las explicitamente:

$$d\Delta e_2 x_2 + d\Delta e_3 x_3 + \dots + d\Delta f_2 y_2 + d\Delta f_3 y_3 + \dots = -w_p$$

$$d\Delta e_2 y_2 + d\Delta e_3 y_3 + \dots - d\Delta f_2 x_2 - d\Delta f_3 x_3 - \dots = -w_q$$

$$d\Delta e_2 + d\Delta e_3 + \dots = 0$$

$$d\Delta f_2 + d\Delta f_3 + \dots = 0$$

Designando por C_1 , C_2 , C_3 e C_4 os fatores correlativos correspondentes a cada uma destas equações, teremos:

$$\begin{aligned} d\Delta e_2 &= x_2 C_1 + y_2 C_2 + C_3 & d\Delta f_2 &= y_2 C_1 - x_2 C_2 + C_4 \\ d\Delta e_3 &= x_3 C_1 + y_3 C_2 + C_3 & d\Delta f_3 &= y_3 C_1 - x_3 C_2 + C_4 \\ \vdots & & \vdots & \end{aligned} \quad (8.6i)$$

Tendo em vista as equações de condição (8.6f) e (8.6g), se somarmos membro a membro cada um dos grupos de equações acima, teremos, em $(n-2)$ pares,

$$C_1[x] + C_2[y] + (n-2)C_3 = 0$$

$$C_1[y] - C_2[x] + (n-2)C_4 = 0$$

donde

$$C_3 = -\{C_1[x] + C_2[y]\}/(n-2)$$

$$C_4 = -\{C_1[y] - C_2[x]\}/(n-2)$$

Par	x y	a = x - x ₀ b = y - y ₀	K	A	cos A sen A	e' = K cos A f' = K sen A	10 ⁶ Δe' 10 ⁶ Δf'	10 ⁶ aC ₁ 10 ⁶ bC ₁	10 ⁶ bC ₂ 10 ⁶ aC ₂	10 ⁶ Δe 10 ⁶ Δf	e f	-xΔe -yΔf	-yΔf xΔf	P Q	
	— —	— —	0,790896	148°15'22"	— —	-0,680237 0,420846	— —	— —	— —	— —	-0,680237 0,420846	— —	— —	— —	67,612,00 211,865,70
N ₂	4,492,00 - 3,413,70	-11,939,17 27,61	0,800098	13 23	-0,850105 0,526614	0167 1343	70 497	-49 0	0 -206	21 291	0216 1137	-0,09 0,07	0,99 1,31	— —	612,90 877,08
N ₃	6,759,30 - 3,473,10	-0,671,87 31,79	0300	11 25	-0,849803 7100	0097 1838	70 495	-40 0	1 -167	30 328	0186 1465	-0,21 0,10	1,14 2,22	— —	613,83 879,40
N ₄	9,014,40 - 3,449,80	-7,416,77 8,49	0502	09 26	9499 7590	0026 2337	71 499	-30 0	0 -128	41 371	0145 1836	-0,37 0,14	1,28 3,34	— —	614,74 882,88
N ₅	11,666,00 - 3,468,00	-4,765,17 26,69	0704	07 28	9197 8076	-0,679955 2833	71 496	-20 2	0 -82	51 414	0094 2250	-0,59 0,18	1,44 4,83	— —	615,59 887,89
N ₇	13,918,15 - 3,479,00	-2,512,67 37,69	0906	05 29	8892 8566	9883 3332	72 499	-10 0	1 -43	63 456	0031 2706	-0,88 0,22	1,59 6,35	— —	616,30 894,46
N ₆	16,438,80 - 3,462,50	7,63 21,19	1108	03 31	8590 9031	9812 3827	71 495	0 0	0 0	71 495	-0,679960 3201	-1,17 0,25	1,71 8,14	— —	616,84 902,85
N ₈	18,768,20 - 3,490,80	2,337,03 - 49,49	1310	01 32	8284 9541	9738 4326	74 499	10 0	1 40	85 539	9875 3740	-1,59 0,30	1,88 10,12	— —	617,13 913,27
N ₉	21,187,60 - 3,470,50	4,756,43 29,19	1512	147 59 33	7981 0,530026	9667 4822	71 496	20 0	0 82	91 578	9784 4318	-1,93 0,32	2,01 12,25	— —	617,21 925,84
N ₁₀	23,794,10 - 3,635,90	7,362,93 - 194,59	1714	57 33	7675 0515	9393 5321	74 499	50 0	3 127	107 626	9677 4944	-2,55 0,39	2,28 14,90	— —	616,94 941,13
N ₁₁	26,036,10 - 3,199,60	9,604,93 241,71	1916	55 36	7371 1000	9520 5717	73 496	39 0	4 166	108 662	9569 5606	-2,81 0,35	2,12 17,24	— —	616,25 958,72
N ₁₂	28,667,90 - 3,311,50	12,263,73 129,81	0,802116	147 53 38		-0,679445 0,426315	75 498	50 0	-2 211	123 709	-0,679445 0,426315	-3,53 0,41	2,35 20,33	— —	67,615,05 211,969,38
Σ = (n-2)x ₀	180,742,90	0						0	0			15,72	18,79		
Σ = (n-2)y ₀	-37,854,40	0						0	0			2,73	-101,03		

$$\sum (a^2 + b^2) = 644,526,898$$

$$Q_{(n-1),n} = 211,969,38$$

$$P_{(n-1),n} = 67,615,05$$

$$A_{(n-1),n} = 147^{\circ}53'38''$$

$$K_{(n-1),n} = 0,802116$$

$$\frac{dK}{dK} = w_K / (n-2) = 201 \times 10^{-6}$$

$$Q_{(n-1),n} = 211,969,38$$

$$P_{(n-1),n} = 67,615,05$$

$$A_{(n-1),n} = 147^{\circ}53'38''$$

$$K_{(n-1),n} = 0,802116$$

$$\frac{dK}{dK} = w_K / (n-2) = 201 \times 10^{-6}$$

$$Q_{(n-1),n} = 211,969,38$$

$$P_{(n-1),n} = 67,615,05$$

$$A_{(n-1),n} = 147^{\circ}53'38''$$

$$K_{(n-1),n} = 0,802116$$

$$\frac{dK}{dK} = w_K / (n-2) = 201 \times 10^{-6}$$

$$Q_{(n-1),n} = 211,969,38$$

$$P_{(n-1),n} = 67,615,05$$

$$A_{(n-1),n} = 147^{\circ}53'38''$$

$$K_{(n-1),n} = 0,802116$$

$$\frac{dK}{dK} = w_K / (n-2) = 201 \times 10^{-6}$$

$$Q_{(n-1),n} = 211,969,38$$

$$P_{(n-1),n} = 67,615,05$$

$$A_{(n-1),n} = 147^{\circ}53'38''$$

$$K_{(n-1),n} = 0,802116$$

$$\frac{dK}{dK} = w_K / (n-2) = 201 \times 10^{-6}$$

$$Q_{(n-1),n} = 211,969,38$$

$$P_{(n-1),n} = 67,615,05$$

$$A_{(n-1),n} = 147^{\circ}53'38''$$

$$K_{(n-1),n} = 0,802116$$

$$\frac{dK}{dK} = w_K / (n-2) = 201 \times 10^{-6}$$

$$Q_{(n-1),n} = 211,969,38$$

$$P_{(n-1),n} = 67,615,05$$

$$A_{(n-1),n} = 147^{\circ}53'38''$$

$$K_{(n-1),n} = 0,802116$$

$$\frac{dK}{dK} = w_K / (n-2) = 201 \times 10^{-6}$$

substituindo êstes valores em (8.6i) resultará

$$\begin{aligned} d\Delta e_2 &= \{x_2 - [x]/(n-2)\} C_1 + \{y_2 - [y]/(n-2)\} C_2 \\ d\Delta e_3 &= \{x_3 - [x]/(n-2)\} C_1 + \{y_3 - [y]/(n-2)\} C_2 \\ &\vdots \\ d\Delta f_2 &= \{y_2 - [y]/(n-2)\} C_1 - \{x_2 - [x]/(n-2)\} C_2 \\ d\Delta f_3 &= \{y_3 - [y]/(n-2)\} C_1 - \{x_3 - [x]/(n-2)\} C_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ou, fazendo

$$\begin{aligned} x_i - [x]/(n-2) &= a_i \\ y_i - [y]/(n-2) &= b_i \end{aligned} \quad (8.6j)$$

virá

$$\begin{aligned} d\Delta e_2 &= a_2 C_1 + b_2 C_2 & d\Delta f_2 &= b_2 C_1 - a_2 C_2 \\ d\Delta e_3 &= a_3 C_1 + b_3 C_2 & d\Delta f_3 &= b_3 C_1 - a_3 C_2 \\ &\vdots & & \vdots \end{aligned} \quad (8.6k)$$

Destas equações correlativas passaremos imediatamente ao sistema de equações normais:

$$\begin{aligned} \Sigma(a_i^2 + b_i^2) C_1 &= -w_p \\ \Sigma(a_i^2 + b_i^2) C_2 &= -w_q \end{aligned} \quad (8.6l)$$

A solução dêste sistema fornecerá os correlativos que introduzidos em (8.6k) conduzirão aos valores das correções de Δe e Δf . Então, se calcularmos A e K para os pares extremos, em função dos pontos de apoio aí existentes, teremos os erros de fechamento w_a e w_k . Estes podem ser considerados como resultando da acumulação dos erros sistemáticos e da acumulação dupla dos erros acidentais dessas variáveis e podem, em vista disso, ser linearmente distribuídos ao longo da concatenação, decorrendo daí o conhecimento de todos os valores de A e K, livres de erros sistemáticos (v. quadro 8.6-I) e de uma boa parte dos acidentais. Também estarão livres dêsses erros os valores de e e f calculados por (8.2b) aí introduzindo A e K. Conhecidos e e f deduziremos Δe e Δf e, empregando (8.6e) obteremos os erros de fechamento w_p e w_q que, por serem acidentais, são compensados usando as expressões (8.6j) a (8.6l). Acreditamos que o exemplo apresentado no quadro 8.6-I esclareça detalhadamente todos os estágios do cálculo, cuja terminação conduz ao conhecimento de e , f , P e Q para todos os pares, o que permitirá transformar imediatamente em coordenadas-terreno, as coordenadas instrumentais correspondentes a qualquer ponto observado no aparelho.

Passemos agora à compensação dos erros acidentais da altimetria. Inicialmente, façamos em (8.4c)

$$\begin{aligned} K_{i,(i+1)} - K_{(i-1),i} &= \Delta K_i \\ E_{i,(i+1)} - E_{(i-1),i} &= \Delta E_i \\ F_{i,(i+1)} - F_{(i-1),i} &= \Delta F_i \end{aligned} \quad (8.6m)$$

com isso poderemos escrever (8.4c) com o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} R_{23} &= R_{12} - \Delta K_2 z_2 - \Delta E_2 x_2 - \Delta F_2 y_2 \\ R_{34} &= R_{23} - \Delta K_3 z_3 - \Delta E_3 x_3 - \Delta F_3 y_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (8.6n)$$

Somando estas expressões resulta:

$$R_{(n-1),n} = R_{12} - [\Delta K z] - [\Delta E x] - [\Delta F y]$$

Com raciocínio absolutamente análogo ao seguido quando tratamos da planimetria, teremos

$$R_{(n-1),n} - R_{12} + [\Delta K z] + [\Delta E x] + [\Delta F y] = w_r \quad (8.6o)$$

Então, como os valores corretos de ΔK são conhecidos com a compensação prévia da planimetria, obteremos as seguintes equações de condição, deduzidas da mesma forma que (8.6f), (8.6g) e (8.6h):

$$[d\Delta E] = 0 \quad (8.6p)$$

$$[d\Delta F] = 0 \quad (8.6q)$$

$$[d\Delta E x] + [d\Delta F y] = -w_r \quad (8.6r)$$

Estas equações de condição, tratadas como o foram (8.6f), (8.6g) e (8.6h), fornecem as equações correlativas e a equação normal:

$$\begin{aligned} d\Delta E_2 &= -a_2 C_1 & d\Delta F_2 &= -b_2 C_1 \\ d\Delta E_3 &= -a_3 C_1 & d\Delta F_3 &= -b_3 C_1 \\ &\vdots & & \vdots \\ &\vdots & & \vdots \end{aligned} \quad (8.6s)$$

$$\Sigma(a^2 + b^2)C_1 = -w_r \quad (8.6t)$$

onde a_i e b_i são os valores expressos por (8.6j) e já calculados durante a resolução do problema da planimetria. É interessante notar que, com a solução apresentada, os dois correlativos da planimetria e também o da altimetria, têm, como mostram as equações (8.6l) e (8.6t), exatamente o mesmo coeficiente, o que importa numa notável simplificação dos cálculos.

O exemplo apresentado no quadro 8.6-II mostra, em detalhe, tôdas as operações inerentes ao cálculo da altimetria, até chegar aos valores de E , F e R , com os quais podemos calcular a cota compensada de qualquer ponto de coordenadas instrumentais conhecidas. Há, porém, alguns detalhes do cálculo que merecem explicação especial.

Em primeiro lugar é necessário mostrar as peculiaridades relativas à escala. Praticamente todos os aparelhos dispõem de engre-

QUADRO 83-II

Par	K ²	K	K'	ΔK'	z	10 ⁶ Kδφ	10 ⁶ aC ₁	10 ⁶ ΔE	10 ⁶ E	10 ⁶ bC ₁	10 ⁶ ΔF	10 ⁶ F	ΔK ^z	ΔEx	ΔFy	R
0,63983373	0,799896	0,999870	0,999870	-165	527,5	-1508	-353	-637	-5	0	+54	+4	+0,09	2,86	+0,18	0,14
0,64004609	0,800028	0,800028	1,000035	-179	546,3	-2249	-286	-1311	-642	-1	+53	+58	+0,09	8,86	+0,18	3,27
0,64027654	0,800171	1,000214	1,000214	-199	542,0	-189	-219	-1194	-1953	0	+54	+111	+0,10	10,76	+0,18	12,40
0,64052923	0,800330	1,000413	1,000413	-217	537,0	-251	-141	-1334	-759	0	+54	+165	+0,11	15,56	+0,18	1,92
0,64080743	0,800504	1,000630	1,000630	-358	536,0	-358	-74	-2721	+575	-1	+53	+219	+0,19	-37,87	+0,18	13,35
0,64110536	0,800790	1,000988	1,000988	-126	530,0	-11950	0	-10726	+3296	-1	+53	+272	+0,07	+176,32	+0,18	50,85
0,64142786	0,800891	1,001114	1,001114	-267	551,7	-6918	+69	-8211	-7430	-1	+53	+325	+0,15	-154,10	+0,18	125,72
0,64177116	0,801105	1,001381	1,001381	-313	551,5	-1825	+140	-461	-781	-1	+53	+378	+0,17	+9,77	+0,18	28,05
0,64213846	0,801355	1,001694	1,001694	-276	579,0	-1233	+218	-209	+320	-5	+49	+431	+0,16	4,97	+0,18	17,93
0,64252701	0,801576	1,001970	1,001970	-329	640,5	-5792	+284	-4284	+529	+7	+61	+480	+0,21	+111,53	+0,18	22,57
0,64284685	0,801839	1,002299	1,002299	-346	694,0	+2960	+362	-4546	-3755	+3	+60	+541	+0,24	-130,32	+0,18	89,36
0,64338998	0,802116	1,002645	1,002645						+791							40,53
						-12668	0	+796		0	594		+1,58	-44,24	+1,98	

$$\begin{aligned}
 E_{(n-1),n} &= +0,000787 \\
 -E_{12} &= +0,000005 \\
 -[K\delta\varphi] &= +0,012668 \\
 w_E &= +0,013460
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{(n-1),n} &= +0,0000600 \\
 -F_{12} &= -0,0000005 \\
 w_F &= 0,000595
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{(n-1),n} &= -40,51 \\
 -R_{12} &= -0,14 \\
 dE/dx &= +221,23 \\
 [xK\delta\varphi] &= -196,05 \\
 dF/dy &= -2,04 \\
 [z\Delta K] &= -1,58 \\
 w_r &= -19,09
 \end{aligned}$$

$$\frac{dE}{dE} = \frac{w_E}{n-2} = +0,001224$$

$$\frac{dF}{dF} = \frac{w_F}{n-2} = +0,0000054$$

Fórmulas: $\Delta E_i = a_i E + K \Delta \varphi_i + a_i C_1$; $\Delta F = \frac{dF}{dF} = b_i C_1$; $R_{i(i+1)} = R_{(i-1),i} - \Delta K_{izi} - \Delta E_{ixi} - \Delta F_{iyi}$

$$C_1 = -w_r \div \sum (a_i^2 + d_i^2) = +0,02962 \times 10^{-6}$$

nagens que permitem realizar as leituras altimétricas nas dimensões naturais. Assim, se o modelo ótico está projetado numa escala cujo valor *nominal* é 1:K, escolher-se-ão engrenagens cuja relação permita a leitura direta das cotas. Alguns aparelhos, particularmente os mais antigos, não dispõem de dispositivo análogo para a transformação das coordenadas planimétricas. Nesses casos, então, teremos as leituras altimétricas em escala 1:1 e as planimétricas em 1:K₀, considerando o modelo ótico isento de erros. Se, porém, êstes forem levados em conta, teremos, para a planimetria, uma escala cujo denominador é K, pouco diferente de K₀, e para a altimetria K/K₀, pouco diferente de 1. Consequentemente, se o denominador da escala altimétrica pode ser expresso, de maneira geral, por

$$K' = K/K_0 \quad (8.6u)$$

a primeira das fórmulas (8.6m) deverá ser substituída por

$$K'_{i,(i+1)} - K'_{(i-1),i} = \Delta K_i \quad (8.6v)$$

e, assim, será necessário substituir ΔK por $\Delta K'$ nas expressões (8.6n) e (8.6o). Pelas mesmas razões será também imprescindível substituir K por K' em (8.2e).

Outro detalhe importante refere-se às fórmulas para o cálculo progressivo de E e F. Multiplicando (8.1c) e (8.1d) pelo denominador K da escala do modelo (escala planimétrica) e tendo em vista (8.2f) obteremos

$$\begin{aligned} E_{i,(i+1)} &= E_{(i-1),i} + K \, \delta\varphi + \overline{dE} \\ F_{i,(i+1)} &= F_{(i-1),i} + \overline{dF} \end{aligned} \quad (8.6w)$$

e de (8.1g) e (8.1h),

$$\overline{dE} = \frac{E_{(n-1),n} - E_{12} - K \sum_2^{n-1} \delta\varphi_i}{n - 2} \quad (8.6x)$$

$$\overline{dF} = \frac{F_{(n-1),n} - F_{12}}{n - 2}$$

8.7 — Compensação simplificada da planimetria

Corrigindo diretamente A e K dos respectivos erros sistemáticos, estamos agindo da maneira a mais rigorosa possível. É, porém, viável considerar *e* e *f* como variáveis independentes e tratá-las da mesma maneira que A e K, exceto no aerocaminhamento a azimute constante.

Para compreendermos a simplificação, diferenciemos (8.2b):

$$\begin{aligned} de &= -K \operatorname{sen} A \, dA + \cos A \, dK \\ df &= K \cos A \, dA + \operatorname{sen} A \, dK \end{aligned} \quad (8.7a)$$

Ora, como os erros de fechamento são sempre pequenos, é lícito substituir em (8.7a) as diferenciais por êsses erros e, assim,

$$\begin{aligned}w_e &= -K \operatorname{sen} A w_a + \cos A w_k \\w_f &= K \cos A w_a + \operatorname{sen} A w_k\end{aligned}\quad (8.7b)$$

Sendo w_a e w_k as diferenças entre os valores inicial e final de A e K e tendo em vista que nos casos considerados $\theta=0$, podemos escrever (8.1e) e (8.1f) sob a forma:

$$\begin{aligned}\overline{dK} &= -w_k/(n-2) \\ \overline{dA} &= -w_a/(n-2)\end{aligned}\quad (8.7c)$$

e, assim,

$$\begin{aligned}w_e &= (-K \operatorname{sen} A \overline{dA} + \cos A \overline{dK}) (n-2) \\w_f &= (K \cos A \overline{dA} + \operatorname{sen} A \overline{dK}) (n-2)\end{aligned}\quad (8.7d)$$

Ora, como nos casos considerados as variações de A e K só dependem dos respectivos erros, tais variações serão, evidentemente, pequenas, logo, seus produtos por $\overline{dA}$ e $\overline{dK}$ serão quantidades de segunda ordem e podem, em vista disso, ser abandonadas. Consequentemente, podemos fazer em (8.7d)

$$\begin{aligned}-K \operatorname{sen} A \overline{dA} + \cos A \overline{dK} &= \overline{de} \\ K \cos A \overline{dA} + \operatorname{sen} A \overline{dK} &= \overline{df}\end{aligned}\quad (8.7e)$$

que serão os erros sistemáticos de e e f . Então, (8.7d) transforma-se em

$$\begin{aligned}w_e &= (n-2)\overline{de} \\w_f &= (n-2)\overline{df}\end{aligned}$$

donde tiramos

$$\begin{aligned}\overline{de} &= w_e/(n-2) \\ \overline{df} &= w_f/(n-2)\end{aligned}\quad (8.7f)$$

Distribuindo linearmente os erros de fechamento w_e e w_f , obtaremos valores sucessivos de e e f que diferem entre si, respectivamente, de $\overline{de}$ e $\overline{df}$. Consequentemente, na solução simplificada, podemos substituir em (8.6e) Δe por $\overline{de}$ e Δf por $\overline{df}$, resultando

$$\begin{aligned}P_{(n-1),n} &= P_{12} + \overline{de}[x] + \overline{df}[y] = w_p \\ Q_{(n-1),n} &= Q_{12} + \overline{de}[y] - \overline{df}[x] = w_q\end{aligned}\quad (8.7g)$$

O exemplo prático que vemos resolvido no quadro 8.7-I esclarecerá suficientemente a sequência das operações inerentes ao método simplificado de compensação.

QUADRO 8.7-I

Par	x	$a_i = x - x_0$	$10^6 a C_1$	$10^6 b C_2$	$\Delta e 10^6$	e	$-x \Delta e$	$-y \Delta f$	P
	y	$b_i = y - y_0$	$10^6 b C_1$	$-10^6 a C_2$	$\Delta f 10^6$	f	$-y \Delta e$	$x \Delta f$	Q
	—	—	—	—	—	-0,680237	—	—	67.612,00
	—	—	—	—	—	+0,420846	—	—	211.865,70
N ₂	4.492,00	-11.939,17	-51	0	+ 21	-0,680216	- 0,09	+ 0,99	67.612,90
	- 3.413,70	+ 27,61	0	-206	+ 291	+0,421137	+ 0,07	+ 1,31	211.867,08
N ₃	6.759,30	- 9.671,87	-41	+ 1	+ 32	-0,680184	- 0,21	+ 1,14	67.613,83
	- 3.473,10	- 31,79	0	-167	+ 330	+0,421467	+ 0,11	+ 2,23	211.869,42
N ₄	9.014,40	- 7.416,77	-31	0	+ 41	-0,680143	- 0,37	+ 1,27	67.614,73
	- 3.449,80	- 8,49	0	-128	+ 369	+0,421836	+ 0,14	+ 3,33	211.872,89
N ₅	11.666,00	- 4.765,17	-20	0	+ 52	-0,680091	- 0,61	+ 1,44	67.615,56
	- 3.468,00	- 26,69	0	- 82	+ 415	+0,422251	+ 0,18	+ 4,84	211.877,91
N ₇	13.918,50	- 2.512,67	-10	+ 1	+ 63	-0,680028	- 0,87	+ 1,57	67.616,26
	- 3.479,00	- 37,69	0	- 43	+ 454	+0,422705	+ 0,22	+ 6,32	211.884,45
N ₆	16.438,80	+ 7,63	0	0	+ 72	-0,679956	- 1,18	+ 1,72	67.616,80
	- 3.462,50	- 21,19	0	0	+ 497	+0,423202	+ 0,25	+ 8,17	211.892,87
N ₈	18.768,20	+ 2.337,03	+10	+ 1	+ 93	-0,679873	- 1,56	+ 1,87	67.617,11
	- 3.490,80	- 49,49	0	+ 40	+ 537	+0,423739	+ 0,29	+ 10,08	211.903,24
N ₉	21.187,60	+ 4.756,43	+20	0	+ 92	-0,679781	- 1,95	+ 2,00	67.617,16
	- 3.470,50	- 29,19	0	+ 82	+ 579	+0,424318	+ 0,32	+ 12,27	211.915,83
N ₁₀	23.794,10	+ 7.362,93	+31	+ 3	+ 106	-0,679675	- 2,52	+ 2,26	67.616,90
	- 3.635,90	- 194,59	0	+127	+ 624	+0,424942	+ 0,39	+ 14,85	211.931,07
N ₁₁	26.036,10	+ 9.604,93	+40	- 4	+ 108	-0,679567	- 2,81	+ 2,12	67.616,21
	- 3.199,60	+ 241,71	0	+166	+ 663	+0,425605	+ 0,35	+ 17,26	211.948,68
N _{1e}	28.667,90	+12.236,73	+52	- 2	+ 122	-0,679445	- 3,50	+ 2,34	67.615,05
	- 3.311,50	+ 129,81	0	+211	+ 708	+0,426313	+ 0,40	+ 20,30	211.969,38
$\Sigma = (n-2)x_0$	180.742,90	0	0	0	+ 792		-15,67	+ 18,72	
$\Sigma = (n-2)y_0$	-37.854,40	0	0	0	+5467		+ 2,72	+100,96	
x_0	16.431,17								
y_0	- 3.441,31								

$$\begin{aligned} e_{(n-1),n} &= -0,679445 \\ -e_{12} &= +0,680237 \\ w_e &= +0,000792 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{(n-1),n} &= +0,426315 \\ -f_{12} &= -0,420846 \\ w_f &= +0,005469 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{(n-1),n} &= 67.615,05 \\ -P_{12} &= 67.612,00 \\ de[x] &= + 13,01 \\ df[y] &= - 18,81 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{(n-1),n} &= 211.969,38 \\ -Q_{12} &= 211.865,70 \\ de[y] &= - 2,72 \\ -df[x] &= - 89,83 \end{aligned}$$

$$\overline{de} = \frac{w_e}{n-2} = +0,000072$$

$$\overline{df} = \frac{w_f}{n-2} = +0,000497$$

$$w_p = - 2,75$$

$$w_q = + 11,13$$

$$\Sigma(a^2 + b^2) = 644.526.989,33$$

$$C_1 = \frac{-10^6 w_p}{\Sigma(a^2 + b^2)} = +0,00426$$

$$C_2 = \frac{-10^6 w_q}{\Sigma(a^2 + b^2)} = -0,01726$$

Fórmulas: $\Delta e_i = a_i C_1 + b_i C_2 + \overline{de}$; $e_{i,(i+1)} = e_{(i-1),i} + \Delta e_i$; $P_{i,(i+1)} = P_{(i-1),i} - x_i \Delta e_i - y_i \Delta f_i$
 $\Delta f_i = b_i C_1 + a_i C_2 + \overline{df}$; $f_{i,(i+1)} = f_{(i-1),i} + \Delta f_i$; $Q_{i,(i+1)} = Q_{(i-1),i} - y_i \Delta e_i + x_i \Delta f_i$

8.8 — Justificação da mudança de variáveis

No parágrafo 8.6 substituímos as variáveis A e K , que são independentes, pelas e e f , que não o são, pois, como mostra (8.2b), são funções de A e K . Ora, ao aplicarmos o método dos mínimos quadrados às equações de condição (8.6f), (8.6g) e (8.6h), estamos procurando obter as correções $d\Delta e$ e $d\Delta f$ de forma que atendam à condição

$$[(d\Delta e)^2 + (d\Delta f)^2] = \text{minimum}$$

Ora, se ΔA e ΔK são as diferenças de azimuth e denominador da escala de um par para o seguinte, poderemos escrever, de acordo com (8.7a),

$$\begin{aligned}\Delta e &= -K \sin A \Delta A + \cos A \Delta K \\ \Delta f &= K \cos A \Delta A + \sin A \Delta K\end{aligned}\quad (8.8a)$$

Nestas expressões A e K podem ser igualados aos respectivos valores medios pois as diferenças para esses valores multiplicadas por ΔA e ΔK podem ser consideradas como quantidades de segunda ordem e abandonadas. Assim sendo, os erros acidentais de ΔA e ΔK , que produzem os de Δe e Δf podem ser obtidos imediatamente de (8.8a), por simples diferenciação:

$$\begin{aligned}d\Delta e &= -K \sin A \, d\Delta A + \cos A \, d\Delta K \\ d\Delta f &= K \cos A \, d\Delta A + \sin A \, d\Delta K\end{aligned}\quad (8.8b)$$

A soma dos quadrados das expressões acima fornece, depois de algumas simplificações elementares,

$$(d\Delta e)^2 + (d\Delta f)^2 = K^2(d\Delta A)^2 + (d\Delta K)^2 \quad (8.8c)$$

ou

$$(d\Delta e)^2 + (d\Delta f)^2 = K^2\{(d\Delta A)^2 + (d\Delta K/K)^2\}$$

Ora, é claro que $d\Delta K$ é proporcional a K , logo, $d\Delta K/K$ é um número relativo que, como o azimuth, independe de K . Assim sendo $d\Delta A$ e $d\Delta K/K$ serão, na realidade, as incógnitas do problema e, se admitirmos que tanto o azimuth quanto a escala são determinados com o mesmo grau de precisão, durante a orientação progressiva, deveríamos obter $d\Delta A$ e $d\Delta K/K$ condicionando sua determinação a

$$[(d\Delta A)^2 + (d\Delta K/K)^2] = \text{minimum}$$

ou, como K é uma constante, chegaríamos ao mesmo resultado fazendo

$$K^2[(d\Delta A)^2 + (d\Delta K/K)^2] = \text{minimum}$$

ou

$$[(d\Delta e)^2 + (d\Delta f)^2] = \text{minimum}.$$

ficando, assim demonstrada a legitimidade da mudança de variáveis.

Embora possa ser objetado que $d\Delta A$ e $d\Delta K/K$ não devem ter iguais pesos, a prática tem demonstrado que os resultados alcançados admitindo essa igualdade são perfeitamente coerentes.

CAPÍTULO IX

AEROTRIANGULAÇÃO EM CIRCUITO FECHADO

9.1 — Ideia geral do problema

A aerotriangulação em circuito fechado destina-se a envolver uma grande área com faixas simples apoiadas apenas em suas extremidades. Trata-se, portanto, de tornar possível o levantamento da área com o mínimo indispensável de apóio terrestre.

A figura formada pelas faixas que envolvem a área poderá ser qualquer uma, independentemente a solução do problema, que é absolu-

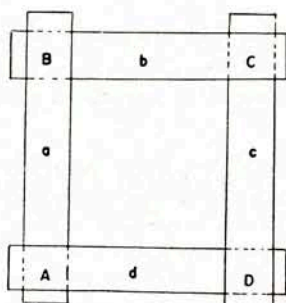


FIG. 9.1

lutamente geral, do aspecto apresentado por aquela figura. Em vista disso, vamos abordar a solução do nosso problema supondo o caso simples de quatro faixas (Fig. 9.1) que se ligam para formar, aproximadamente, um quadrado. A Fig. 9.1 mostra as quatro faixas, com o sentido em que se desenvolveu a orientação progressiva e as áreas comuns que vemos nos quatro cantos da figura são aquelas onde deverá ser efetuado o apóio. Este, no que diz respeito à planimetria, constará de

determinação de posições astronômicas e de azimutes de direções definidas, bem como de pequenas triangulações locais ou poligonais. Os pontos fotográficos deverão ser escolhidos prevendo o apóio do último par de uma faixa e do primeiro da que se segue.

Não é necessário que as posições astronômicas sejam determinadas com grande rigor, pois elas vão servir apenas no cálculo dos azimutes astronômicos e na determinação das convergências de meridianos destinadas a transformar os azimutes astronômicos em azimutes planos. Assim sendo, se a região a levantar já dispuser de uma carta sofrível, as coordenadas dela tiradas já poderão atender aos fins em vista, tornando dispensável a determinação das posições astronômicas.

Considerando como origem das coordenadas um ponto qualquer do primeiro par da faixa a , é também possível fazer o transporte de coordenadas, partindo dessa origem, em função das próprias medidas instrumentais, o que permite dispensar as posições astronômicas nas zonas B, C e D; mas, tal procedimento alonga demasiado o trabalho, uma vez que a transformação dos azimutes astronômicos em azimutes planos terá de aguardar a passagem das faixas no aparelho. O processo é, porém, perfeitamente legítimo e conduzirá, certamente, a resultados plenamente satisfatórios.

Quanto à altimetria, o que nos parece mais aconselhável é utilizar dados estatoscópicos e empregar a técnica do aeronivelamento. Assim procedendo será possível determinar a altura de vôo acima do terreno no primeiro par da faixa a e no último da d e, como já dispomos dos valores de bz dados pelo estatoscópio, compensá-los distribuindo linearmente o erro de fechamento.

A existência dos dados estatoscópicos não reduz, porém, a densidade do apóio altimétrico a ser realizado nas áreas A, B, C e D, que denominaremos áreas de inflexão. Dentro delas deverão ser efetuados nivelamentos locais que determinem as cotas *relativas* dos pontos fotográficos, com precisão superior à que será capaz de fornecer o aparelho. Um nivelamento taqueométrico satisfará integralmente a essa condição.

Se as faixas forem extensas e, por essa razão, não for possível empregar a aeropoligonação nem, por falta de dados estatoscópicos, o aeronivelamento, o aerocaminhamento resolverá satisfatoriamente o problema.

Um simples raciocínio mostra que a qualquer faixa longa apoiada em suas extremidades sobre pontos ligados a uma rede geodésica, o método aplica-se integralmente, pois bastará realizar apóios intermediários da mesma forma que propomos para as zonas A, B, C e D. Será apenas necessário esclarecer que os pares intermediários apoiados serão sempre os últimos das faixas de ré e os primeiros das de vante. Em vista disso não é necessário que a sua orientação absoluta seja refeita ao ser iniciada a orientação progressiva da faixa de vante.

9.2 — Determinação dos erros de fechamento em P, Q e R

A fim de facilitar a dedução dos erros de fechamento, vamos abordar separadamente a planimetria da altimetria e empregar o método vetorial. Imaginemos uma das faixas do circuito tendo suas extremidades referidas a dois sistemas diferentes (Fig. 9.2) mas de eixos paralelos, o que é sempre possível, uma vez que em tôdas as áreas de inflexão os azimutes planos são conhecidos. Se a origem instrumental no início da faixa está situada em O, a posição dessa origem é definida pelo vetor $\vec{V}_{12}$, cujas componentes segundo X e Y

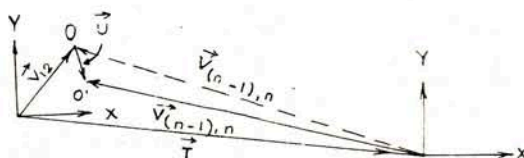


Fig. 9.2

são, respectivamente, $\vec{P}_{12}$ e $\vec{Q}_{12}$. Como no final da faixa os pontos estão referidos a outro sistema, a posição da origem instrumental nesse sistema, na ausência de erros durante a orientação progressiva, seria definida pelo vetor $\vec{V}'_{(n-1),n}$. Em virtude, porém, dos erros do processo de concatenação a posição de O deslocar-se-á para O' , sendo OO' o vetor $\vec{U}$ que define o erro total de fechamento. Assim sendo, a posição de O' será definida pelo vetor $\vec{V}_{(n-1),n}$, de componentes $\vec{P}_{(n-1),n}$ e $\vec{Q}_{(n-1),n}$. Sendo $\vec{T}$ a translação que seria necessário dar ao sistema de eixos do início da faixa para fazê-lo coincidir com o do fim, teremos, como mostra a Fig. 9.2, a seguinte equação vetorial

$$\vec{V}_{(n-1),n} - \vec{V}_{12} - \vec{U} + \vec{T} = 0 \quad (9.2a)$$

Se DP e DQ são os erros totais de fechamento em P e Q , é claro que $\vec{DP}$ e $\vec{DQ}$ serão os componentes de $\vec{U}$ segundo os eixos coordenados; então se exprimirmos todos os vetores em função dos respectivos componentes, com exceção de $\vec{T}$, teremos

$$\begin{aligned} \vec{V}_{(n-1),n} &= \vec{i} P_{(n-1),n} + \vec{j} Q_{(n-1),n} \\ \vec{V}_{12} &= \vec{i} P_{12} + \vec{j} Q_{12} \\ \vec{U} &= \vec{i} DP + \vec{j} DQ \end{aligned}$$

Substituindo estes valores em (9.2a) e transpondo $\vec{T}$, virá

$$\vec{i}(P_{(n-1),n} - P_{12} - DP) + \vec{j}(Q_{(n-1),n} - Q_{12} - DQ) = -\vec{T} \quad (9.2b)$$

Esta expressão é geral, valendo para qualquer faixa do circuito. Então, se examinarmos a Fig. 9.3 verificamos que as translações $\vec{T}$ que definem as posições relativas dos sistemas de referência, são vetores

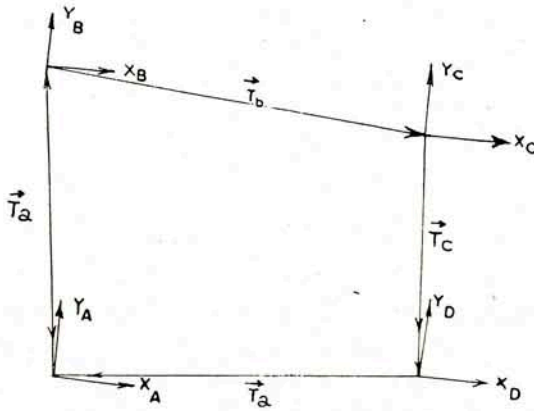


Fig. 9.3

que formam um circuito fechado, logo, sua soma será nula. Consequentemente, se somarmos para todas as faixas as expressões análogas a (9.2b), teremos

$$\vec{i}\Sigma(P_{(n-1),n} - P_{12} - DP) + \vec{j}\Sigma(Q_{(n-1),n} - Q_{12} - DQ) = 0 \quad (9.2c)$$

Conforme vimos, o vetor U e, portanto, seus componentes DP e DQ só dependem da propagação dos erros ao longo da faixa. Por conseguinte DP e DQ equivalem, respectivamente, aos valores fornecidos por (8.6e) para $(P_{(n-1),n} - P_{12})$ e $(Q_{(n-1),n} - Q_{12})$, isto é

$$DP = -[\Delta e \ x] - [\Delta f \ y] + w_p$$

$$DQ = -[\Delta e \ y] + [\Delta f \ x] + w_q$$

Substituindo estes valores em (9.2c) obtemos

$$\begin{aligned} & \vec{i}\Sigma(P_{(n-1),n} - P_{12} + [\Delta e \ x] + [\Delta f \ y] - w_p) \\ & + \vec{j}\Sigma(Q_{(n-1),n} - Q_{12} + [\Delta e \ y] - [\Delta f \ x] - w_q) = 0 \end{aligned}$$

ou, fazendo

$$\Sigma w_p = W_p$$

$$\Sigma w_q = W_q$$

virá

$$\begin{aligned} & \vec{i}\Sigma(P_{(n-1),n} - P_{12} + [\Delta e \ x] + [\Delta f \ y]) \\ & + \vec{j}\Sigma(Q_{(n-1),n} - Q_{12} + [\Delta e \ y] - [\Delta f \ x]) = \vec{i}W_p + \vec{j}W_q \end{aligned}$$

donde tiramos prontamente

$$\Sigma(P_{(n-1),n} - P_{12} + [\Delta e \ x] + [\Delta f \ y]) = W_p \quad (9.2d)$$

$$\Sigma(Q_{(n-1),n} - Q_{12} + [\Delta e \ y] - [\Delta f \ x]) = W_q$$

Os primeiros membros de (9.2d) são iguais às somas, para cada faixa, de parcelas absolutamente análogas às que figuram nos primeiros membros de (8.6e), embora aqui $(P_{(n-1),n}$ e $Q_{(n-1),n}$) e $(P_{12}$ e $Q_{12})$ pertençam a dois sistemas diferentes. Daí concluímos que cada uma das faixas do circuito pode ser tratada como se fosse isolada, o que conduzirá a valores de w que não serão erros de fechamento e sim parcelas para a formação de W . Designando, pois, por w' as referidas parcelas, podemos escrever:

$$\begin{aligned} W_p &= w'_{ap} + w'_{bp} + w'_{cp} + w'_{dp} \\ W_q &= w'_{aq} + w'_{bq} + w'_{cq} + w'_{dq} \end{aligned} \quad (9.2e)$$

onde o índice que precede p e q indica a faixa a que corresponde w' .

Pelo exposto concluímos que o erro de fechamento do circuito pode ser calculado com extrema facilidade.

Seguindo caminho absolutamente análogo ao que nos permitiu deduzir (9.2e), obteremos o erro altimétrico de fechamento do circuito, que nos é dado por

$$W_r = w'_{ar} + w'_{br} + w'_{cr} + w'_{dr} \quad (9.2f)$$

9.3 — Compensação dos erros de fechamento

Se W_p e W_q são o resultado do acúmulo dos erros acidentais ao longo de todo o circuito, eles serão representados por expressões inteiramente análogas às (8.6h), onde as somas que figuram nos primeiros membros devem ser entendidas como abrangendo os elementos de todas as faixas. Por outro lado, em cada faixa, prevalecerão equações de condição idênticas a (8.6f) e (8.6g). Assim sendo, teremos para a planimetria

$$\begin{aligned} [d\Delta e \ x] + [d\Delta f \ y] &= W_p \\ [d\Delta e \ y] - [d\Delta f \ y] &= W_q \\ [d\Delta e]_a &= 0 \\ [d\Delta e]_b &= 0 \\ [d\Delta e]_c &= 0 \\ [d\Delta e]_d &= 0 \\ [d\Delta f]_a &= 0 \\ [d\Delta f]_b &= 0 \\ [d\Delta f]_c &= 0 \\ [d\Delta f]_d &= 0 \end{aligned} \quad (9.3a)$$

Temos, pois, 10 equações de condição, das quais resultarão 10 fatores correlativos, em função dos quais exprimiremos as correções escrevendo as seguintes equações:

$$\begin{aligned} d\Delta e_{a2} &= x_{a2}C_1 + y_{a2}C_2 + C_3 & d\Delta f_{a2} &= y_{a2}C_1 - x_{a2}C_2 + C_4 \\ d\Delta e_{a3} &= x_{a3}C_1 + y_{a3}C_2 + C_3 & d\Delta f_{a3} &= y_{a3}C_1 - x_{a3}C_2 + C_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} d\Delta e_{d2} = a_{d2}C_1 + b_{d2}C_2 & d\Delta f_{d2} = b_{d2}C_1 - a_{d2}C_2 \\ d\Delta e_{d3} = a_{d3}C_1 + b_{d3}C_2 & d\Delta f_{d3} = b_{d3}C_1 - a_{d3}C_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Destas equações correlativas passamos ao sistema de equações normais:

$$\begin{aligned} \Sigma(a_{ri}^2 + b_{ri}^2)C_1 &= -w_p \\ \Sigma(a_{ri}^2 + b_{ri}^2)C_2 &= -w_q \end{aligned} \quad (9.3d)$$

perfeitamente análogo ao (8.6l). Vemos, assim que, apesar da aparente complexidade do problema, sua solução apresenta a mesma simplicidade que a compensação de uma faixa isolada o que é, de fato, surpreendente.

Pelas próprias equações correlativas (9.3c), verificamos que os valores de a_{ri} e b_{ri} são calculados para cada faixa, devendo ser usado para isso o mesmo modelo do quadro 8.6-I ou do 8.7-I. Usando uma folha para cada faixa, obteremos os valores parciais de $\Sigma(a_{ri}^2 + b_{ri}^2)$, cujo total será a soma dos resultados registrados em cada folha.

Resta agora chamar atenção para o cálculo dos valores de P e Q para todos os pares. Admitindo como origem de todas as coordenadas aquela que serviu para calcular o apóio terrestre do primeiro par da faixa (a) e do último da (d), poderemos admitir como exatos os valores de P e Q do primeiro par da faixa (a). Assim sendo, a folha relativa à primeira faixa poderá ser totalmente preenchida, o que permitirá calcular os valores compensados de P e Q para o último par da faixa (a). As diferenças entre êsses valores e os calculados em função do apóio terrestre existente na área B (Fig. 9.1) serão as correções a serem aplicadas aos valores de P e Q calculados para o primeiro par da faixa (b) através do apóio terrestre. Tais serão os valores de P e Q iniciais da faixa (b). O procedimento daí por diante será o mesmo, até chegar ao último par da última faixa do circuito. Aí chegando, deveremos obter valores de P e Q transportados iguais aos diretamente calculados para o último par da última faixa, em função do apóio na área A, o que constitui excelente verificação dos cálculos.

Pelo exposto verificamos que a continuidade do circuito independe da observação de pontos comuns a duas faixas consecutivas nas áreas de inflexão. Realmente essa continuidade é garantida apenas pelo conjunto de pontos de apóio situados naquelas áreas e tendo suas posições definidas num mesmo sistema de eixos coordenados. Daí resulta a extrema facilidade com que é possível efetuar o cálculo de todo o circuito, praticamente sem recorrer a fórmulas diversas das empregadas no cálculo de uma faixa simples, exceto as que deduzimos para o cálculo dos erros de fechamento.

A fim de evitar que os erros que se acumulam em cada faixa para formar W_p e W_q tenham ordens de grandeza muito diversas, é conveniente planejar o serviço de tal forma que todas as faixas te-

nam, aproximadamente extensões iguais, não devendo ser abandonada a possibilidade de intercalar apôio numa mesma faixa e tratar as seções como faixas independentes.

Estudemos agora a compensação da altimetria. Comparando a última expressão de (9.2d) com (8.6o), verificamos a possibilidade de invocar os mesmos argumentos de que lançamos mão ao tratarmos da compensação da planimetria e escrever para a altimetria as seguintes equações de condição:

$$\begin{aligned}
 [d\Delta E \ x] + [d\Delta F \ y] &= -w_r \\
 [d\Delta E]_a &= 0 \\
 [d\Delta E]_b &= 0 \\
 [d\Delta E]_c &= 0 \\
 [d\Delta E]_d &= 0 \\
 [d\Delta F]_a &= 0 \\
 [d\Delta F]_b &= 0 \\
 [d\Delta F]_c &= 0 \\
 [d\Delta F]_d &= 0
 \end{aligned} \tag{9.2f}$$

Segundo exatamente a mesma marcha que no caso da planimetria chegaremos às equações correlativas e à equação normal:

$$\begin{aligned}
 d\Delta E_{a2} &= a_{a2}C_1 & d\Delta F_{a2} &= b_{a2}C_1 \\
 d\Delta E_{a3} &= a_{a3}C_1 & d\Delta F_{a3} &= b_{a3}C_1 \\
 \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\
 d\Delta E_{b2} &= a_{b2}C_1 & d\Delta F_{b2} &= b_{b2}C_1 \\
 d\Delta E_{b3} &= a_{b3}C_1 & d\Delta F_{b3} &= b_{b3}C_1 \\
 \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\
 d\Delta E_{c2} &= a_{c2}C_1 & d\Delta F_{c2} &= b_{c2}C_1 \\
 d\Delta E_{c3} &= a_{c3}C_1 & d\Delta F_{c3} &= b_{c3}C_1 \\
 \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\
 d\Delta E_{d2} &= a_{d2}C_1 & d\Delta F_{d2} &= b_{d2}C_1 \\
 d\Delta E_{d3} &= a_{d3}C_1 & d\Delta F_{d3} &= b_{d3}C_1 \\
 \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\
 \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot
 \end{aligned} \tag{9.2g}$$

$$\Sigma(a^2_{ri} + b^2_{ri})C'_1 = -W_r$$

onde, como no caso de uma faixa isolada, o coeficiente de C'_1 é o mesmo que o de C_1 e C_2 .

O que foi dito anteriormente com relação ao cálculo progressivo de P e Q pode ser repetido integralmente quanto ao cálculo progressivo de R.

CAPÍTULO X

COMPENSAÇÃO DE BLOCO

10.1 — Ideia geral

Suponhamos que tenha sido fotografada uma área com faixas de voo aproximadamente paralelas, como mostra a Fig. 10.1. Se cada faixa houver sido aerotriangulada e compensada independente,

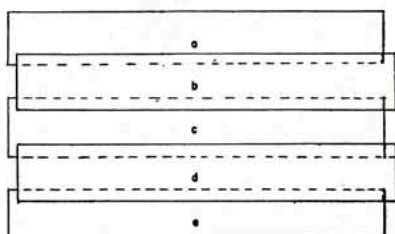


FIG. 10.1

os pontos comuns às faixas contíguas apresentarão coordenadas diferentes e essas diferenças devem ser compensadas para transformar o conjunto num “bloco” rígido. É compreensível que o tratamento de um tal conjunto pelo método dos mínimos quadrados envolveria um tal número de equações de condição que a solução do problema, do ponto de vista prático, tornar-se-ia extremamente complexa e dependeria, possivelmente, do emprego de um computador eletrônico. Em vista disso, é preferível seguir outro caminho que, embora empírico, conduz a resultados perfeitamente satisfatórios com pouco trabalho. Embora o método escolhido seja uma aplicação dos mínimos quadrados, essa aplicação não indica que as coordenadas finais sejam as mais prováveis e sim, apenas, que a soma dos quadrados das correções aplicadas aos valores não compensados é um minimum. De fato, as coordenadas mais prováveis seriam aquelas que resultassem da aplicação do método dos mínimos quadrados levando em conta todas as condições relativas às próprias faixas e aos pontos comuns.

Convém ainda esclarecer que os pontos comuns que vão sofrer diretamente a compensação devem ser escolhidos a priori, pois devem estar situados o mais próximo possível das seções AA', BB',

etc., (Fig. 10.1) que servirão de base à compensação. Essas seções devem estar afastadas, uma da outra, de cerca de 3 quilômetros.

10.2 — Compensação das coordenadas

Tratemos em primeiro lugar da compensação das coordenadas planimétricas e imaginemos, para facilitar o raciocínio, que o sistema de referência usado é constituído pelo eixo médio longitudinal das faixas do bloco e por outro a ele perpendicular, um pouco aquém do início das faixas (Fig. 10.2). Suponhamos ainda que as coordenadas x e y , nesse sistema sejam dadas em escala natural. Na Fig. 10.2

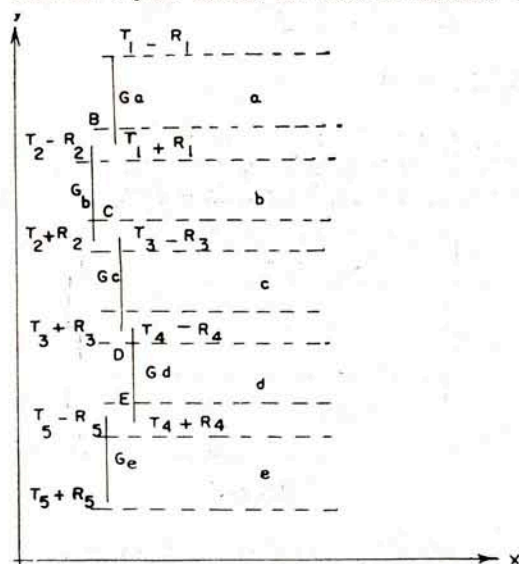


Fig. 10.2

vemos um corte transversal onde B, C, D e E são os pontos comuns às faixas contíguas. A compensação deverá, portanto, ser efetuada de modo que sejam eliminadas as diferenças de coordenadas dos pontos comuns. Para eliminar as diferenças de x podemos dar aos centros G dos diversos segmentos, translações T e aos próprios segmentos rotações em torno de G que desloquem de $-R$ uma das extremidades e de R a outra. Então, se exprimirmos por Δx_b , Δx_c , Δx_d e Δx_e as diferenças entre as coordenadas x observadas em B, C, D e E, poderemos escrever as seguintes equações de condição:

$$\begin{aligned} T_1 + R_1 - T_2 + R_2 &= \Delta x_b \\ T_2 + R_2 - T_3 + R_3 &= \Delta x_c \\ T_3 + R_3 - T_4 + R_4 &= \Delta x_d \\ T_4 + R_4 - T_5 + R_5 &= \Delta x_e \end{aligned} \quad (10.2a)$$

Partindo destas equações de condição, obteremos as seguintes equações correlativas:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= C_1 \\
 R_1 &= C_1 \\
 T_2 &= -C_1 + C_2 \\
 R_2 &= C_1 + C_2 \\
 T_3 &= -C_2 + C_3 \\
 R_3 &= C_2 + C_3 \\
 T_4 &= -C_3 + C_4 \\
 R_4 &= C_3 + C_4 \\
 T_5 &= -C_4 \\
 R_5 &= C_4
 \end{aligned} \tag{10.2b}$$

Daí tiramos os coeficientes das equações normais que são todos nulos exceto

$$[aa] = [bb] = [cc] = [dd] = 4$$

e, assim obtemos imediatamente para os correlativos

$$C_1 = \Delta x_b/4; \quad C_2 = \Delta x_c/4; \quad C_3 = \Delta x_d/4; \quad C_4 = \Delta x_e/4$$

Êstes valores substituidos em (10.2b) fornecem os de T e R, com os quais podemos calcular todas as correções:

$$\begin{aligned}
 A : T_1 - R_1 &= 0 & G_1 : T_1 &= \Delta x_b/4 \\
 B_2 : T_2 - R_2 &= -\Delta x_b/2 & G_2 : T_2 &= (\Delta x_c - \Delta x_b)/4 \\
 C_3 : T_3 - R_3 &= -\Delta x_c/2 & G_3 : T_3 &= (\Delta x_d - \Delta x_c)/4 \\
 D_4 : T_4 - R_4 &= -\Delta x_d/2 & G_4 : T_4 &= (\Delta x_e - \Delta x_d)/4 \\
 E_5 : T_5 - R_5 &= -\Delta x_e/2 & G_5 : T_5 &= \Delta x_e/4 \\
 B_1 : T_1 + R_1 &= \Delta x_b/2 \\
 C_2 : T_2 + R_2 &= \Delta x_c/2 \\
 D_3 : T_3 + R_3 &= \Delta x_d/2 \\
 E_4 : T_4 + R_4 &= \Delta x_e/2 \\
 F : T_5 + R_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Como cada linha representa as correções das abscissas nos pontos de uma faixa, podemos tirar as seguintes conclusões:

- os pontos situados nas margens do bloco (A, F) não sofrem correções;
- as correções correspondentes aos pontos situados nos eixos das faixas são iguais às médias das correções laterais.

Estas conclusões são de suma importância, pois, delas é que tiramos a disposição dos cálculos das correções.

Procurando agora determinar as correções inerentes às ordenadas y os conceitos são ligeiramente diferentes, mas os resultados são exatamente os mesmos. De fato, para ajustar as ordenadas a um mesmo valor, os centros G poderão sofrer translações T e as distâncias, na mesma faixa, entre G e os pontos laterais poderão ser modificadas de $-R$ para o ponto de menor ordenada e de $+R$ para

o de maior. Assim sendo, as equações de condição serão idênticas às (10.2a) e, consequentemente, o problema será resolvido de maneira análoga.

Vejamos agora como passar das correções no sistema aparelho para as que permitem corrigir diretamente as coordenadas planimétricas do terreno. Sendo c_x e c_y as correções no sistema aparelho e se os eixos dêste sistema estão orientados em relação ao do terreno por um azimuth médio A , as fórmulas gerais para a transformação de coordenadas por simples rotação fornecem:

$$\begin{aligned} c_x &= c_x \cos A + c_y \sin A \\ c_y &= -c_x \sin A + c_y \cos A \end{aligned} \quad (10.2c)$$

Ora, como acabamos de demonstrar, as correções c_x para os pontos laterais são sempre da forma $k\Delta x$, sendo k igual a zero para os pontos extremos (A, F) e a $\pm 1/2$ para os outros pontos laterais. Da mesma forma c_y é sempre da forma $k\Delta y$, sendo k sempre igual ao de c_x . Em tais circunstâncias, podemos transformar as expressões (10.2c) em

$$\begin{aligned} c_x &= k(\Delta x \cos A + \Delta y \sin A) \\ c_y &= k(-\Delta x \sin A + \Delta y \cos A) \end{aligned}$$

mas, as quantidades entre parêntesis são iguais, respectivamente, às diferenças ΔX e ΔY no sistema do terreno, logo,

$$\begin{aligned} c_x &= k\Delta X \\ c_y &= k\Delta Y \end{aligned}$$

Seguindo caminho idêntico, mostrariamos, sem dificuldade que as correções inerentes aos pontos G seriam, também no sistema do terreno, iguais, para a mesma faixa, às médias das correções dos pontos laterais. Assim sendo, poderemos operar diretamente com as coordenadas-terreno, o que facilita consideravelmente a aplicação do método.

No que diz respeito à altimetria, poderíamos fazer o estudo exatamente da mesma forma que fizemos para x . Neste caso bastaria trocar x por Z e, assim, desenvolveríamos fórmulas idênticas. Vemos, pois, que X , Y e Z podem ser tratados exatamente da mesma forma.

Segue-se um exemplo prático para a compensação de Z , tirado do "Bulletin de la Société Belge de Photogrammetrie" (n. 45, setembro de 1956).

Km	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0
0.5	+0.40	+0.80	-0.80	+0.23	-0.27
1	+0.42	+0.84	-0.84	+0.20	-0.19
1.5	+0.45	+0.89	-0.89	+0.11	-0.11
2	+0.47	+0.93	-0.93	+0.03	-0.01
2.5	+0.49	+0.98	-0.98	+0.06	+0.03
3	+0.51	+1.02	-1.02	-0.14	+0.14
3.5	+0.42	+0.83	-0.83	-0.02	+0.07
4	+0.32	+0.64	-0.64	+0.10	-0.05
4.5	+0.22	+0.44	-0.44	+0.22	-0.11
5	+0.13	+0.25	-0.25	+0.34	-0.34
5.5	+0.03	+0.06	-0.06	+0.46	-0.23
6	-0.07	-0.13	+0.13	+0.58	-0.29
6.5	-0.26	-0.52	+0.52	+0.44	-0.22
7	-0.45	-0.90	+0.90	+0.30	-0.15
7.5	-0.65	-1.29	+1.29	+0.15	-0.08
8	-0.84	-1.67	+1.67	+0.01	-0.01
8.5	-1.03	-2.06	+2.06	-0.13	+0.13
9	-0.93	-1.86	+1.86	-0.14	+0.07
9.5	-0.83	-1.66	+1.66	-0.14	+0.07
10	-0.73	-1.46	+1.46	-0.15	+0.08
10.5	-0.63	-1.26	+1.26	-0.16	+0.16
11	-0.53	-1.06	+1.06	-0.17	+0.17
12	0	0	0	0	0

IMPRIMIU:
INDÚSTRIA GRÁFICA SIQUEIRA S/A
RUA AUGUSTA, 235 — SÃO PAULO

SECRETARIA DA AGRICULTURA

Secretário: *Eng.º Agrônomo Urbano de Andrade Junqueira*

INSTITUTO GEOGRÁFICO E GEOLÓGICO

Diretor Técnico — *Eng.º Valdemar Lefèvre*

Serviço de Geodésia

Chefe de Serviço — *Eng.º Ludovico Taliberti*

Serviço de Topografia

Chefe de Serviço — *Eng.º Juvenal Felicíssimo*

Serviço de Geologia Geral

Chefe de Serviço — *Eng.º Plínio de Lima*

Serviço de Geologia Econômica

Chefe de Serviço — *Eng.º Jesuino Felicíssimo Junior*

Secção de Estudos Geográficos

Engenheira Chefe — *Eng.ª Zilda Sampaio Perroni*

Laboratório de Química

Químico Chefe — *Eng.º Benedito Alves Ferreira*

Laboratórios Experimentais de Tratamento Semi Industrial de Minerais

Engenheiro Chefe — *Eng.º Nicolino Viola*

Gabinete de Desenho, Fototécnica e Mapoteca

Desenhista Chefe — *Rogério de Freitas Campos*

Biblioteca

Bibliotecária Chefe — *Zenobia Mele Pereira da Silva*

Secção de Expediente e Administração

Chefe de Secção — *José de Almeida Leite*

Sector de Processamento da Despesa

Encarregado — *Fernando Barros Cunha*

Tesouraria

Tesoureiro — *Marcio Leme Asprino*

Almoxarifado

Almoxarife Encarregado — *Bernardino Alvarenga*

Garage

Garagista Encarregado Substituto — *Sylvio Marques Mauricio*

Organização
do
INSTITUTO GEOGRÁFICO E GEOLÓGICO
DECRETO Nº 9871 DE 28-12-1938

